

Analyse temps fréquence des signaux

**P. DELACHARTRE
D. VRAY
CREATIS
INSA-LYON**

Plan

I - SIGNAL ANALYTIQUE FREQUENCE INSTANTANEE

- **GRANDEURS LOCALES : AMPLITUDE ET FREQUENCE INSTANTANEEES**
- **TRANSFORMEE DE HILBERT**
- **SIGNAL ANALYTIQUE**
- **REPRESENTATION D'UN SIGNAL PAR SON ENVELOPPE ET SA PHASE**
- **EXEMPLES**

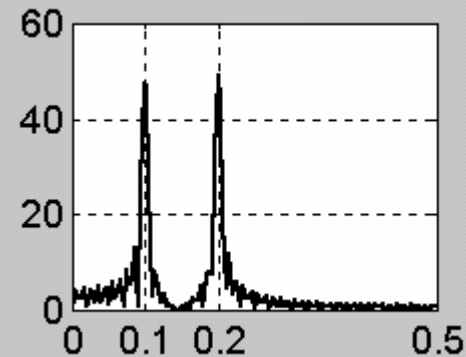
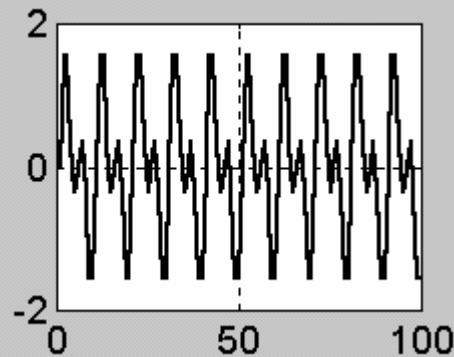
II - TRANSFORMEE DE FOURIER A COURT TERME ET SPECTROGRAMME

- **LE PLAN TEMPS-FREQUENCE**
- **REPRESENTATIONS TEMPS-FREQUENCE LINEAIRES**
- **REPRESENTATIONS TEMPS-FREQUENCE BILINEAIRES**
- **EXEMPLES**

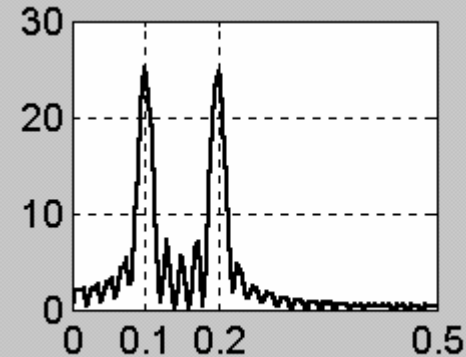
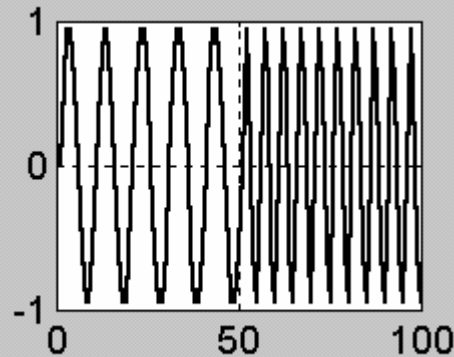
Exemple introductif

- **Signal 1 : somme de deux sinus $f_1=0,1$ et $f_2=0,2$**
- **Signal 2 : sinus avec rupture de fréquence $f_1=0,1$ et $f_2=0,2$**

SIGNAL 1



SIGNAL 2



TEMPS

FREQUENCE

Introduction

- ❑ Espace de représentation
- ❑ Evolution temporelle
- ❑ Regarder *sous un autre angle*
- ❑ Choix de l'espace de représentation → décision
 - *la détection*
 - *l'estimation*
 - *la classification*
 - *la reconnaissance*

- ❑ Signaux stationnaires → analyse spectrale
- ❑ Signaux non-stationnaires ou localement stationnaires →
domaine temporel ----- domaine fréquentiel
méthodes temps-fréquence

Classification des méthodes temps fréquence

- **Représentations linéaires**
 - Transformée de Fourier à court terme
 - Décomposition de Gabor
 - Transformées en ondelettes
- **Représentations quadratiques**
 - Spectrogramme
 - Fonction d'ambiguïté
 - Distribution de Wigner-Ville

Autre classification des méthodes temps fréquence

- **Méthodes instantanées**
 - Notion d'amplitude et de fréquence instantanées
 - Signal analytique
- **Méthodes glissantes**
 - Issues de l'analyse de Fourier
 - Transformée de Fourier à court terme
- **Méthodes conjointes**
 - Aucune hypothèse concernant la stationarité
 - Transformation de Wigner-Ville

Grandeurs locales : amplitude et fréquence instantanées

- **Notion de « spectre instantané » ou de fréquence localisée dans le temps**
- **Exemple de la portée en musique**
 - Le temps est indiqué horizontalement
 - La fréquence est indiquée verticalement
- **Toutefois, l'axe des temps et des fréquences ont une résolution fixée**
- **Analogie limitée :**
 - Dans le cas de la portée musicale, il s'agit de synthèse :
 - RTF \Leftrightarrow Production du signal sonore
 - Analyse :
 - Signal \Leftrightarrow RTF

Signal analytique et transformée de Hilbert pour un signal monochromatique

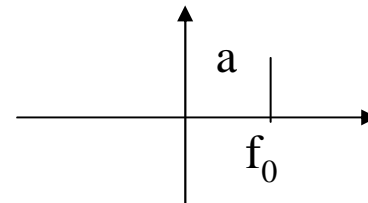
- **Signal réel :** $x(t) = a \cos 2\pi f_0 t = \text{Re} \left[a e^{j2\pi f_0 t} \right] = \text{Re} [z_x(t)]$
 - Amplitude de $x(t)$ \rightarrow module de $z_x(t)$
 - Fréquence de $x(t)$ \rightarrow dérivée de la phase de $z_x(t)$

- **Signal analytique :**

$$z_x(t) = a e^{j2\pi f_0 t} = a \cos 2\pi f_0 t + j a \sin 2\pi f_0 t$$
$$z_x(t) = x(t) + j \check{x}(t)$$

- **Partie réelle et imaginaire sont en quadrature (déphasée de $\pi/2$)**
- **Transformée de Fourier :**

$$Z_x(f) = X(f) + j \check{X}(f) = a \delta(f - f_0)$$



- **Spectre unilatéral**

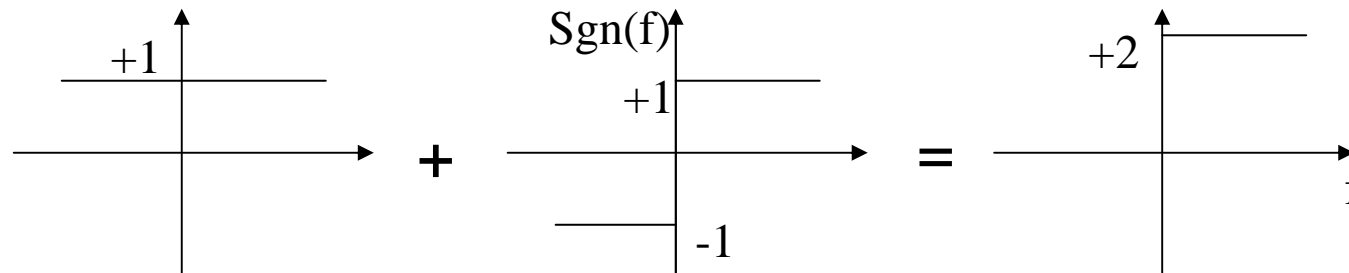
Signal analytique et transformée de Hilbert pour un signal monochromatique (*suite*)

- **Remarque :**

$$X(f) = \frac{a}{2} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \text{ et}$$

$$\check{X}(f) = \frac{ja}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] = -j \operatorname{sgn}(f) X(f)$$

$$Z_x(f) = X(f) + j(-j \operatorname{sgn}(f)) X(f) = 2U(f) X(f)$$



$U(f)$: échelon de Heaviside.

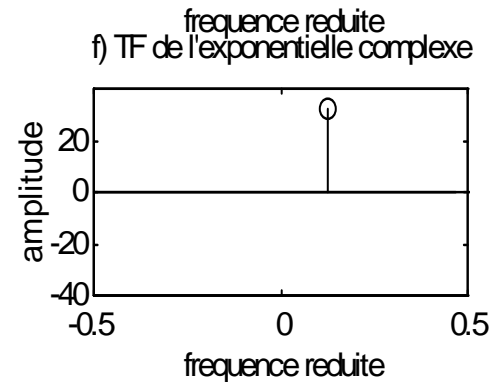
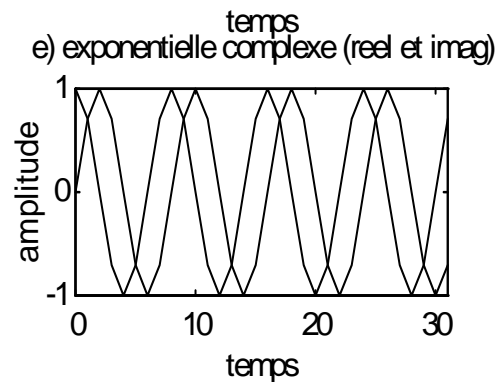
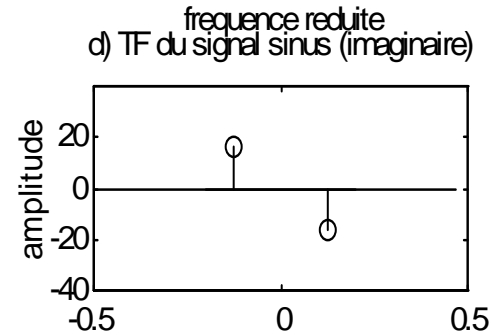
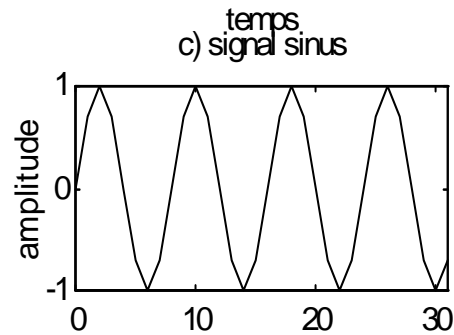
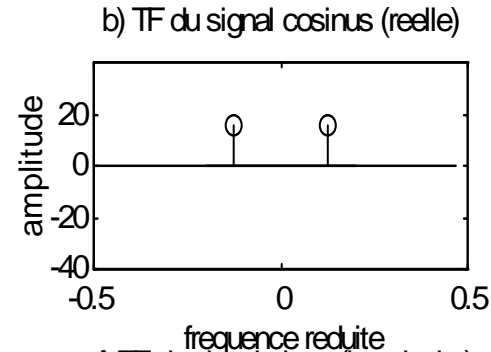
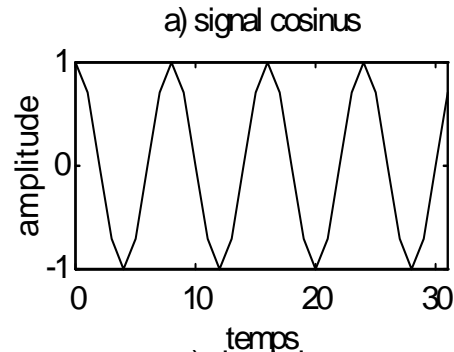
Le filtrage linéaire de gain complexe $-j \operatorname{sgn}(f)$ transforme la partie réelle en partie imaginaire de $z_x(t)$ et réciproquement $(X(f) = j \operatorname{sgn}(f) \check{X}(f))$

➔ **Transformée de Hilbert**

$$\check{x}(t) = H \{x(t)\}$$

Exemple d'une onde monochromatique

$$x(t) = A \cos 2\pi f_0 t = \operatorname{Re}\{ A e^{j2\pi f_0 t} \}$$



Extension à d'autres types de signaux

- On peut associer à tout signal réel $x(t)$ le **signal analytique (complexe)** correspondant :

$$z_x(t) = x(t) + jH\{x(t)\}$$

- H désigne la transformée de Hilbert. Par référence au cas monochromatique, on peut définir une **amplitude instantanée (enveloppe)** $r_x(t)$ et une **fréquence instantanée** $f_x(t)$:

$$r_x(t) = |z_x(t)| \quad \text{et} \quad f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\arg z_x)}{dt}(t)$$

- En fréquence la TF du signal analytique est la forme unilatérale de celle du signal réel :

$$Z_x(f) = X(f) + j(-j\text{sgn}(f))X(f) = 2U(f)X(f)$$

Transformée de Hilbert

La TH associe à un signal $x(t)$, le signal $\overset{\vee}{x}(t)$ défini par :

$$\overset{\vee}{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) x(\tau) d\tau = g(t) * x(t)$$

C'est une opération de filtrage du signal $x(t)$ par un système linéaire de réponse impulsionnelle $g(t) = \frac{1}{\pi t}$

$$\overset{\vee}{X}(f) = F\left\{\overset{\vee}{x}(t)\right\} = F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} * F\{x(t)\} = -j \operatorname{sgn}(f) X(f)$$

Signal analytique :

$$z_x(t) = x(t) + j \overset{\vee}{x}(t)$$

On a donc bien :

$$Z_x(f) = X(f) + j \overset{\vee}{X}(f) = (1 + j \operatorname{sgn}(f)) X(f) = 2U(f) X(f)$$

→ **Le signal analytique ne possède pas de fréquences négatives**

Propriétés de la transformée de Hilbert

- **Linéarité**

- La transformée de Hilbert est une opération linéaire puisque définit comme un produit de convolution

- **Produit de convolution**

$$\check{z}(t) = x(t) * \check{y}(t) = \check{x}(t) * y(t) \text{ et } x(t) * y(t) = -\check{x}(t) * \check{y}(t)$$

- **Déphasage**

- Les signaux $x(t)$ et $\check{x}(t)$ sont en quadratures et

$$\check{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f) \text{ donne :}$$

$$\left| \check{X}(f) \right| = |X(f)| \text{ et } \operatorname{Arg}[\check{X}(f)] = \operatorname{Arg}[X(f)] - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(f)$$

La TH se comporte donc comme un déphaseur pur de $\pm\pi/2$

Représentation d'un signal par son enveloppe et sa phase

Signal analytique associé à $x(t)$:

$$z_x(t) = r_x(t) \exp[j\Phi_x(t)]$$

Et donc naturellement :

$$\operatorname{Re}[z_x(t)] = r_x(t) \cos[\Phi_x(t)]$$

Hypothèses, limitations

spectre de $r_x(t)$ basse fréquence et spectre de $\cos[\Phi_x(t)]$ haute fréquence et disjoint

→ *signaux bande étroite à faible modulation*

Enveloppe : $r_x(t) = |z_x(t)|$

Phase instantanée : $\Phi_x(t) = \arg[z_x(t)]$

Fréquence instantanée : $f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_x(t)}{dt}$

Retard de groupe : $t_x(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\arg[Z_x(f)]}{df}$

Exemple d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$

Signal analytique :

$$z_x(t) = A[\sin(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t - \pi/2)]$$

$$z_x(t) = A[\sin(2\pi f_0 t) - j\cos(2\pi f_0 t)]$$

$$z_x(t) = A \exp(j2\pi f_0 t) \exp(-j\pi/2)$$

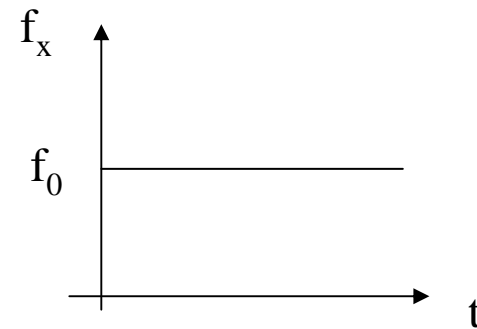
Enveloppe : $r_x(t) = |z_x(t)| = A$

Phase instantanée :

$$\Phi_x(t) = \arg[z_x(t)] = 2\pi f_0 t - \pi/2$$

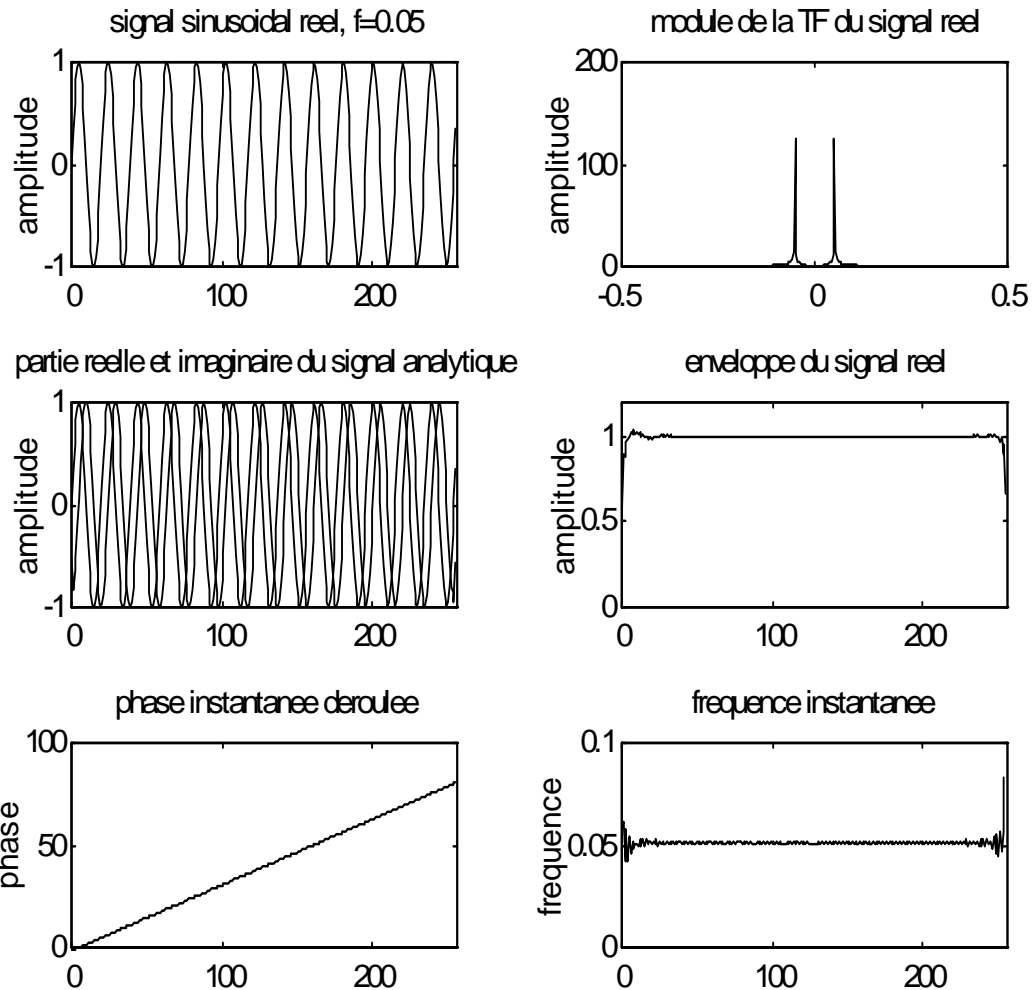
Fréquence instantanée :

$$f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_x(t)}{dt} = f_0$$



Exemple d'un signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$



Exemple d'un signal module linéairement en fréquence

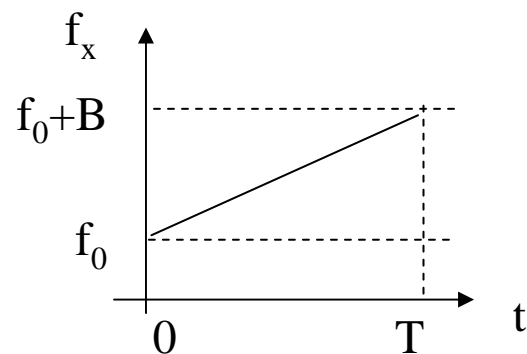
$$x(t) = A \sin\left(2\pi\left[f_0 + \frac{B}{2T}t\right]t\right)$$

Signal analytique : $z_x(t) = A \exp(j2\pi[f_0 + \frac{B}{2T}t]t) \exp(-j\pi/2)$

Enveloppe : $r_x(t) = |z_x(t)| = A$

Phase instantanée : $\Phi_x(t) = \arg[z_x(t)] = 2\pi(f_0 + \frac{B}{2T}t)t - \pi/2$

Fréquence instantanée : $f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_x(t)}{dt} = f_0 + \frac{B}{T}t$

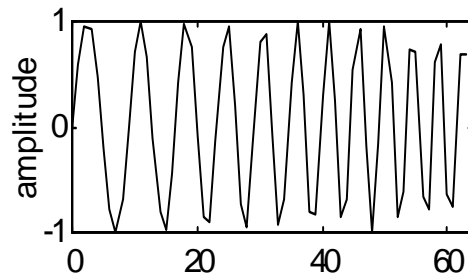


Loi de modulation linéaire

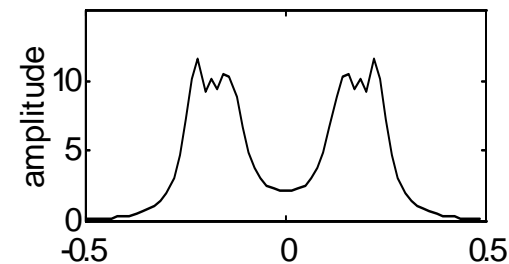
Exemple d'un signal module linéairement en fréquence

$$x(t) = A \sin\left(2\pi\left[f_0 + \frac{B}{2T}t\right]t\right)$$

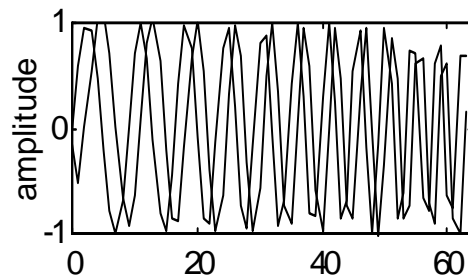
signal reel modulation lineaire de fréquence, $f_0=0.1$, $a=0.0025$



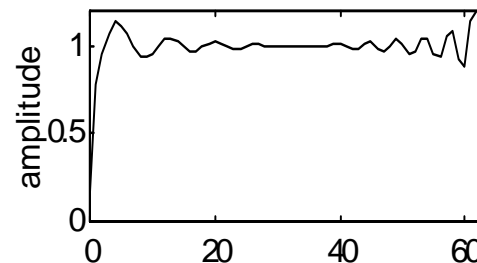
TF du signal reel



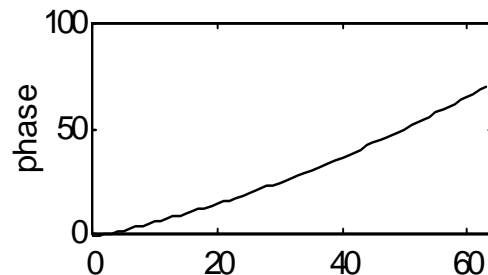
partie réelle et imaginaire du signal analytique



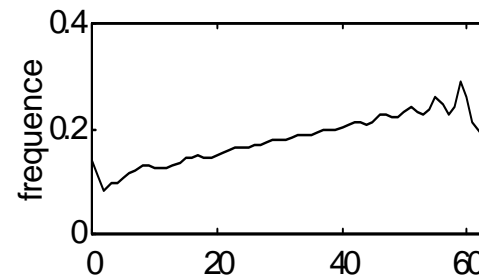
enveloppe du signal reel



phase instantanee deroulee



frequence instantanee



Exemple d'un signal module linéairement en fréquence : Comparaison

$$x(t) = A \sin\left(2\pi\left[f_0 + \frac{B}{2T}t\right]t\right)$$

SIGNAL 1 : Signal analytique théorique

$$z_x(t) = \exp(j2\pi\left[f_0 + \frac{B}{2T}t\right]t) \exp(-j\pi/2)$$

SIGNAL 2 : Signal analytique calculé par TH

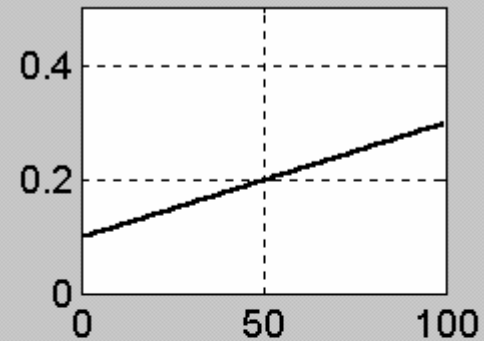
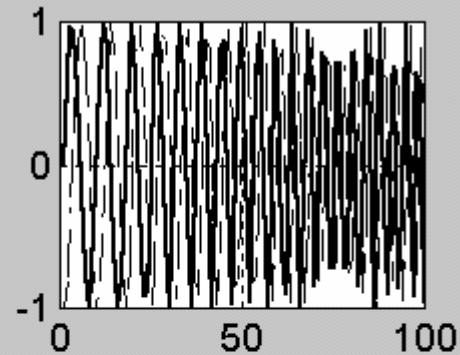
$$z_x(t) = \sin\left(2\pi\left[f_0 + \frac{B}{2T}t\right]t\right) + jH\left\{\sin\left(2\pi\left[f_0 + \frac{B}{2T}t\right]t\right)\right\}$$

Exemple d'un signal module linéairement en fréquence : Comparaison (suite)

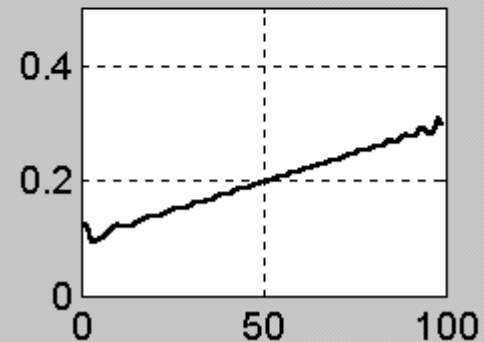
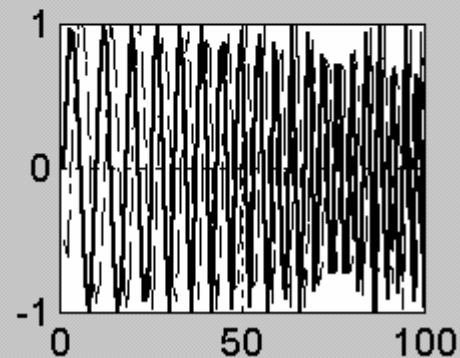
$\text{Re}[z_x(t)], \text{Im}[z_x(t)]$

$f_x(t)$

SIGNAL 1



SIGNAL 2



Exemple d'un signal expérimental

- **Les signaux expérimentaux sont des signaux ultrasonores. Une onde ultrasonore est émise en direction de cibles en mouvement dans un liquide. Les ondes réfléchies par les cibles sont sensibles à la vitesse de ces cibles à cause de l'effet Doppler. L'effet Doppler provoque un changement de la fréquence de l'onde émise. Les signaux analysés ici sont démodulés par la fréquence de l'onde émise, ainsi, la fréquence du signal est directement proportionnelle à la vitesse de la cible. Les signaux présentés ici permettent de connaître la vitesse de bulles microscopiques (diamètre de quelques microns) qui se déplacent vers la surface d'un liquide.**
- **L'onde ultrasonore est à la fréquence de 2 MHz. Après démodulation, le signal Doppler est échantillonné à la fréquence de 500 Hz.**

Exemple d'un signal expérimental (*suite*)

$$f_d = \frac{2v \cos \theta}{c} f_0$$

$$f_0 = 2 \text{ MHz}$$

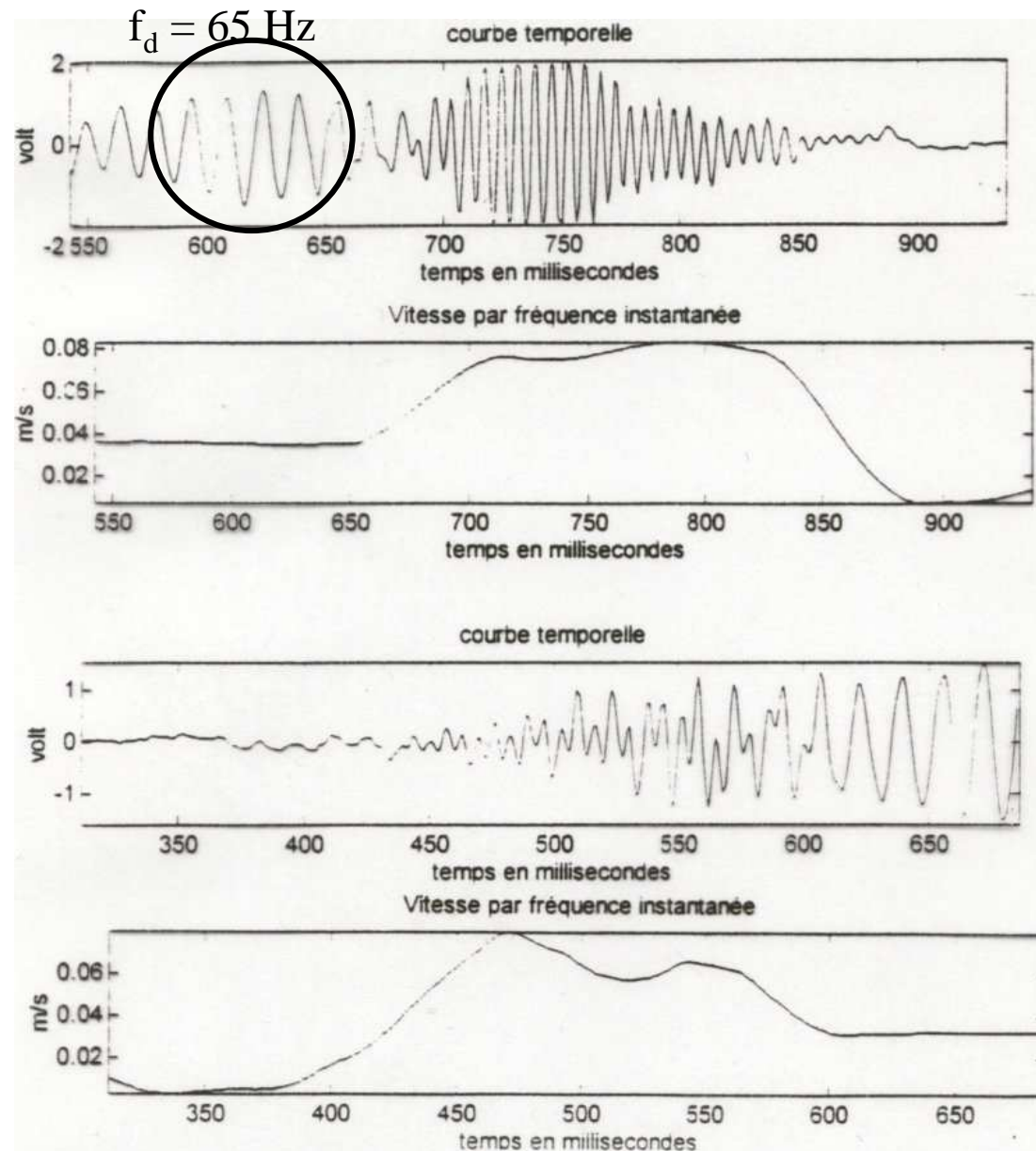
$$c = 1540 \text{ m/s}$$

$$\theta = 45^\circ$$

Exemple :

$$f_d = 65 \text{ Hz} \quad \rightarrow \quad v = \frac{c f_d}{2 f_0 \cos \theta} = 0.035 \text{ m/s}$$

Exemple d'un signal expérimental (*suite*)



Limitations : Exemple 1

$$x(t) = \exp(j2\pi f_1 t) + \exp(j2\pi f_2 t)$$

$$f_2 = f_1 + \Delta f$$

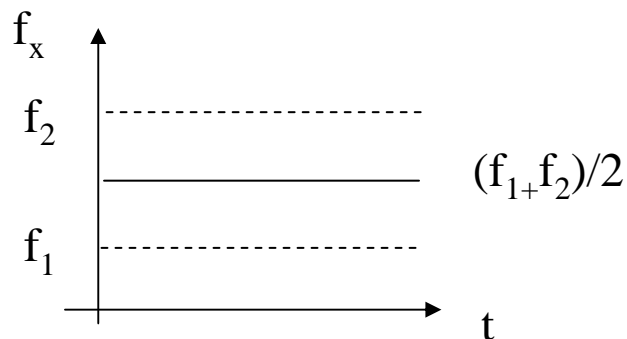
$$x(t) = \exp(j2\pi f_1 t)(1 + \exp(j2\pi \Delta f t))$$

$$x(t) = 2 \exp(j2\pi f_1 t) \exp(j\pi \Delta f t) \cos(\pi \Delta f t)$$

Enveloppe : $r_x(t) = |x(t)| = 2$

Phase instantanée : $\Phi_x(t) = \arg[x(t)] = 2\pi(f_1 + \frac{\Delta f}{2})t + \arg[\cos(\pi \Delta f t)]$

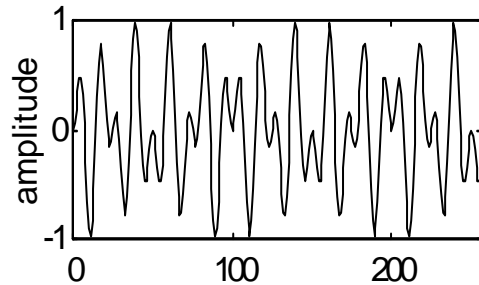
Fréquence instantanée : $f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_x(t)}{dt} = f_1 + \frac{\Delta f}{2} = \frac{f_1 + f_2}{2}$



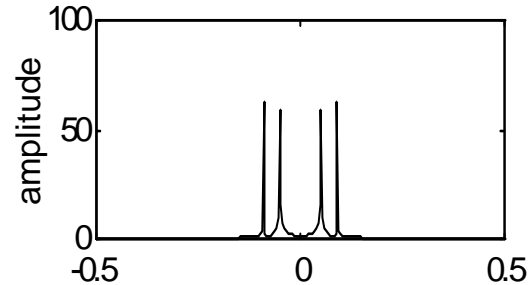
Limitations : Exemple 1 (suite)

$$x(t) = \exp(j2\pi f_1 t) + \exp(j2\pi f_2 t)$$

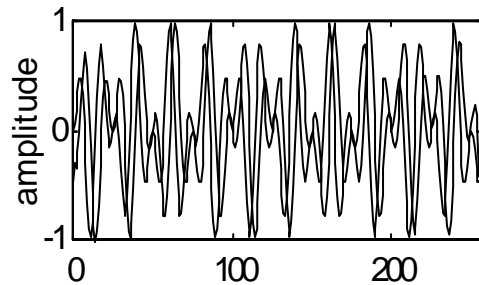
signal sinuscoidal reel, $f_0=0.07$, $f_1=0.02$



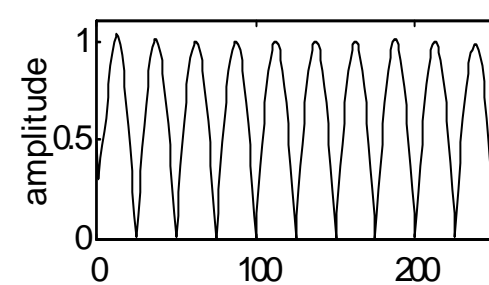
module de la TF du signal reel



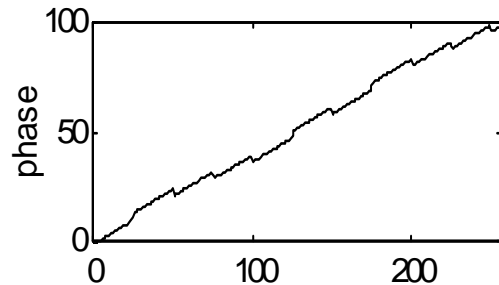
partie réelle et imaginaire du signal analytique



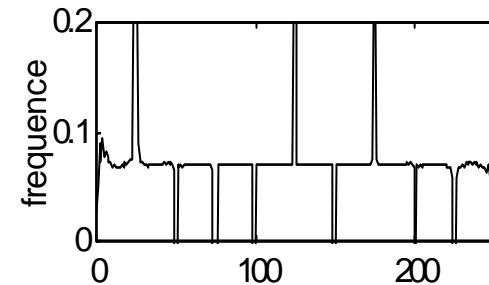
enveloppe du signal reel



phase instantanee deroulee



frequence instantanee



Limitations : Exemple 2

$$x(t) = \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2)$$

$$X(f) = \exp(-j2\pi ft_1) + \exp(-j2\pi ft_2)$$

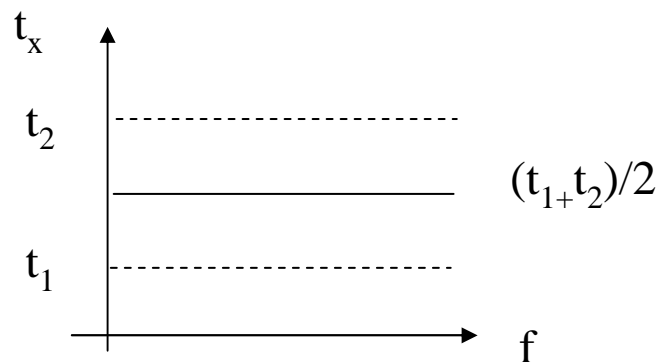
$$t_2 = t_1 + \Delta t$$

$$X(f) = \exp(-j2\pi ft_1)(1 + \exp(-j2\pi f\Delta t))$$

$$X(f) = 2 \exp(-j2\pi ft_1) \exp(-j\pi f\Delta t) \cos(\pi f\Delta t)$$

Phase : $\arg[X(f)] = -2\pi f \left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) + \arg[\cos(\pi f\Delta t)]$

Retard de groupe : $t_x(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d \arg[X(f)]}{df} = t_1 + \frac{\Delta t}{2} = \frac{t_1 + t_2}{2}$

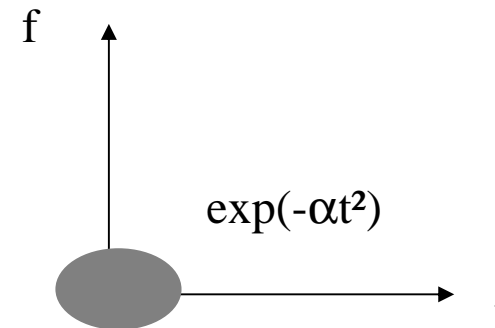
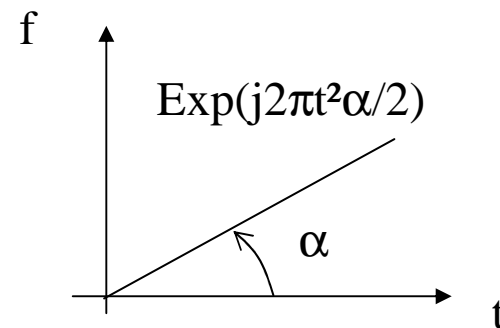
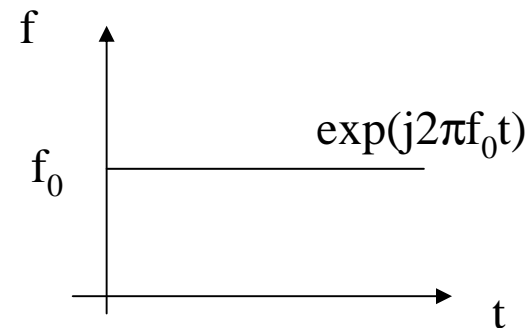
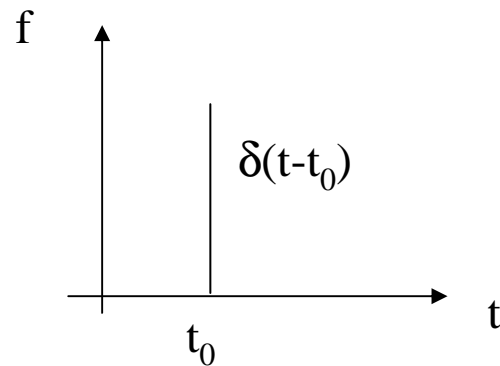


Représentation temps-fréquence

- Vers une représentation temps-fréquence RTF

$$T_x(t, f)$$

- Représentation schématique de ce qui est souhaitable



Le plan temps-fréquence

- **Domaine temporel ----- domaine fréquentiel**
- **Dans le spectre : information délocalisée en temps**
- **Signal à durée limitée et signal à bande limitée**
- ***Inégalité d'Heisenberg-Gabor :***

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

- **Pour une gaussienne $BT \geq 1/2$**

Analyse temps-fréquence

SIGNAL

1 - Les méthodes : *Méthodes temps-fréquence*

IMAGE TEMPS-FREQUENCE

2 - Quoi extraire ? *Traitement d'images, pré-traitement, Segmentation*

IMAGE TEMPS-FREQUENCE EPUREE

3 - Comment paramétrer ? *Reconnaissance de formes, codage, modélisation*

DESCRIPTEURS

4 - Quelle décision ? *Classification, identification*

DECISION

Représentations temps-fréquence linéaires

- **Décomposition du signal sur une famille de signaux élémentaires**
 - Transformée de Fourier à court terme
 - Décomposition de Gabor
 - Transformée en ondelettes
- **Propriété de linéarité**

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad \Rightarrow \quad T_x(t, f) = c_1 T_{x_1}(t, f) + c_2 T_{x_2}(t, f)$$

Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT)

- **TFCT du signal $x(t)$ définie par :**

$$\text{TFCT}_x(t,f;h) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h^*(\tau-t)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- **Interprétation :**

$$x_t(\tau) = x(\tau)h^*(\tau-t) \quad \rightarrow \quad \text{TFCT}_x(t,f;h) = X_t(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_t(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

TF locale au voisinage de t .

- **Autre définition :**

$$X_t(f) = X(f) \otimes H^*(-f)e^{-j2\pi ft} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi)H^*(\xi-f)e^{j2\pi(\xi-f)t} d\xi$$

$$\text{TFCT}_x(t,f;h) = e^{-j2\pi ft} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi)H^*(\xi-f)e^{j2\pi\xi t} d\xi$$

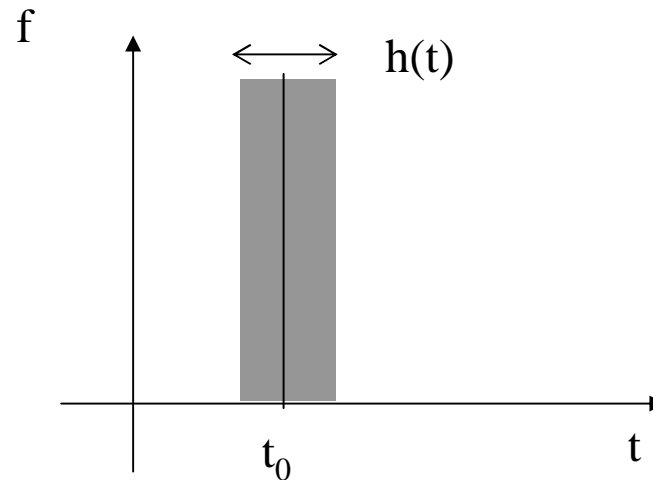
TFCT obtenue en filtrant $x(t)$ par un filtre passe-bande de réponse fréquentielle $H^*(\xi-f)$ centré sur f

Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT)

- **Résolution en temps et en fréquence**

$$x_1(t) = \delta(t - t_0)$$

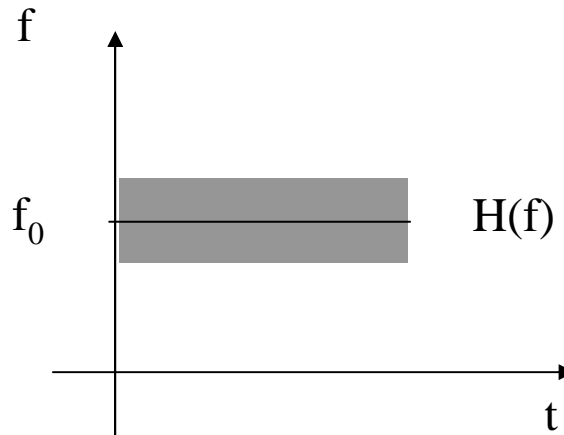
$$\text{TFCT}_{x_1}(t, f; h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t_0) h^*(\tau - t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = e^{-j2\pi t_0 f} h^*(t_0 - t)$$



Transformée de Fourier à Court Terme (TFCT)

$$x_2(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$\text{TFCT}_{x_2}(t, f; h) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - f_0) H^*(\xi - f) e^{j2\pi(\xi - f)t} d\xi = e^{j2\pi(f_0 - f)t} H^*(f_0 - f)$$



Compromis entre résolution en temps et en fréquence exprimé par l'inégalité d'Heisenberg-Gabor.

Décomposition de GABOR

Notion « d'atomes temps-fréquence »

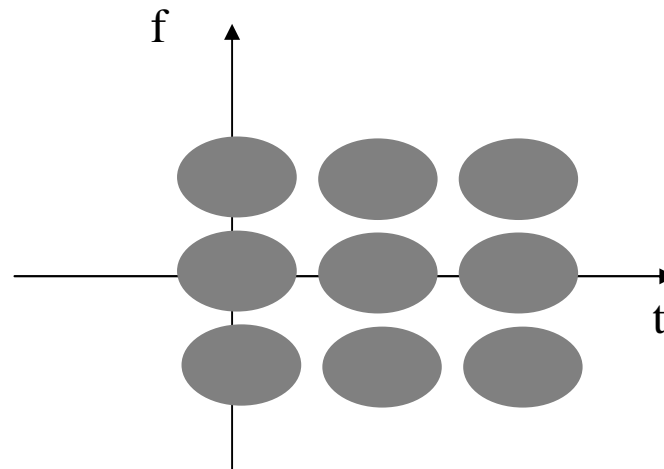
Définition

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_x[n, k] g_{nk}(t) \quad \text{avec} \quad g_{nk}(t) = g(t - nT) e^{j2\pi kFt}$$

$G_x[n, k]$: coefficients de Gabor

Les fonctions $g_{nk}(t)$ sont appelées *logon*

Limitations : maillage rectangulaire



Transformée en ondelettes

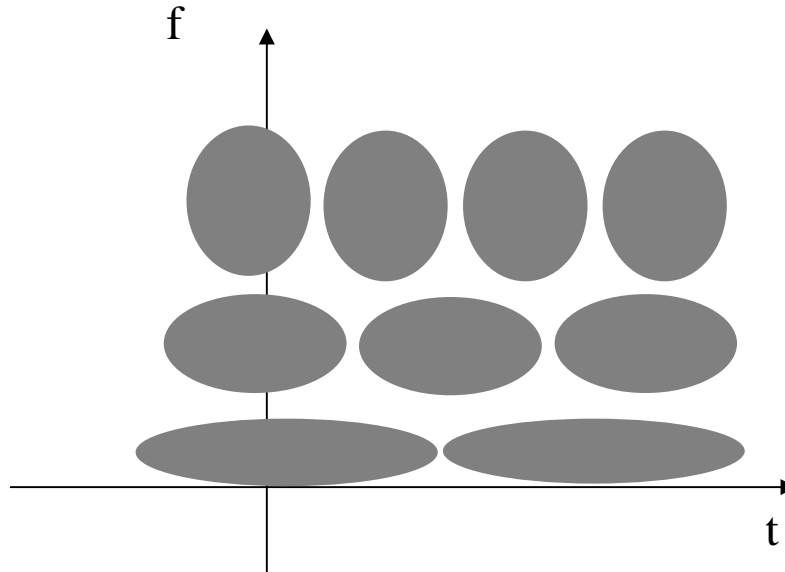
Représentation temps-échelle continue :

$$T_x(t,a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) h_{ta}^*(s) ds \quad \text{avec} \quad h_{ta}^*(s) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} h\left(\frac{s-t}{a}\right)$$

Représentation Temps-Fréquence pour $a = f / f_0$

Pavage dyadique

Interprétation : filtres à Q-constant ($Q = f_0 / B$)



Représentations temps-fréquence bilinéaires

Distribution d'énergie

- **Energie de $x(t)$:** $E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$

$|x(t)|^2$ et $|X(f)|^2$: **densités d'énergie** respectivement temporelle et spectrale.

Rechercher une grandeur mixte $T_x(t, f)$ qui sera une densité *conjointe* telle que :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_x(t, f) dt df$$

Le « spectre instantané » $T_x(t, f)$ est censé « déployer » l'énergie du signal

Deux contraintes naturelles :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T_x(t, f) dt = |X(f)|^2 = P_x(f) \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} T_x(t, f) df = |x(t)|^2 = p_x(t)$$

Représentations temps-fréquence bilinéaires

Principe de superposition quadratique

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow T_x(t, f) = |c_1|^2 T_{x_1}(t, f) + |c_2|^2 T_{x_2}(t, f) + c_1 c_2^* T_{x_1, x_2}(t, f) + c_2 c_1^* T_{x_2, x_1}(t, f)$$

Théorème de Wigner : *Il n'existe pas de représentation temps-fréquence qui soit à la fois bilinéaire, à distributions marginales correctes, et partout non négative.*

Spectrogramme

Le Sonographe

Le principe peut être modélisé ainsi :

$$S_x(t,f;h) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(\xi) H^*(\xi-f) e^{j2\pi\xi t} d\xi \right|^2$$

Spectrogramme ou sonagramme donc aussi :

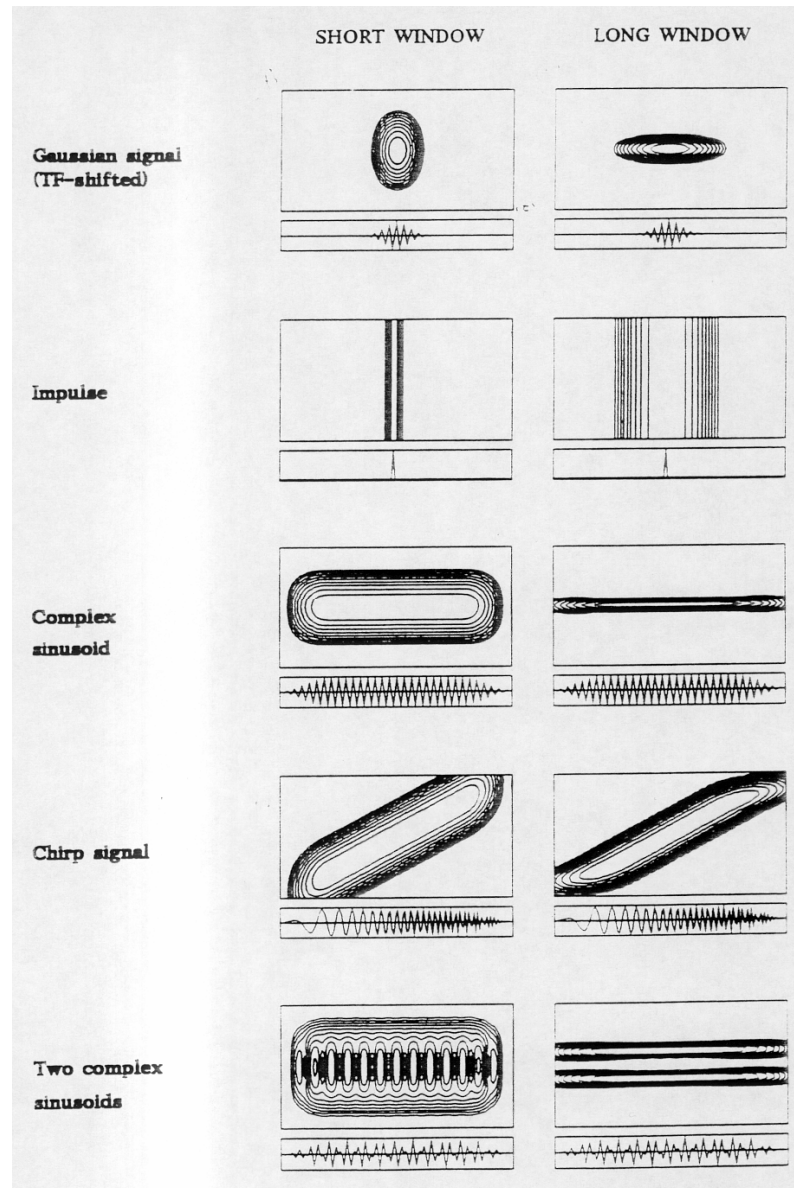
$$S_x(t,f;h) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h^*(\tau-t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right|^2$$

non négatif et à valeur réelle

Choix de la fenêtre d'analyse

Le spectrogramme est le module carré de la TFCT

Effet de la longueur de la fenêtre



Distribution de Wigner-Ville (DWV)

Définition

$$W_{x,y}(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Propriétés

Structure des interférences

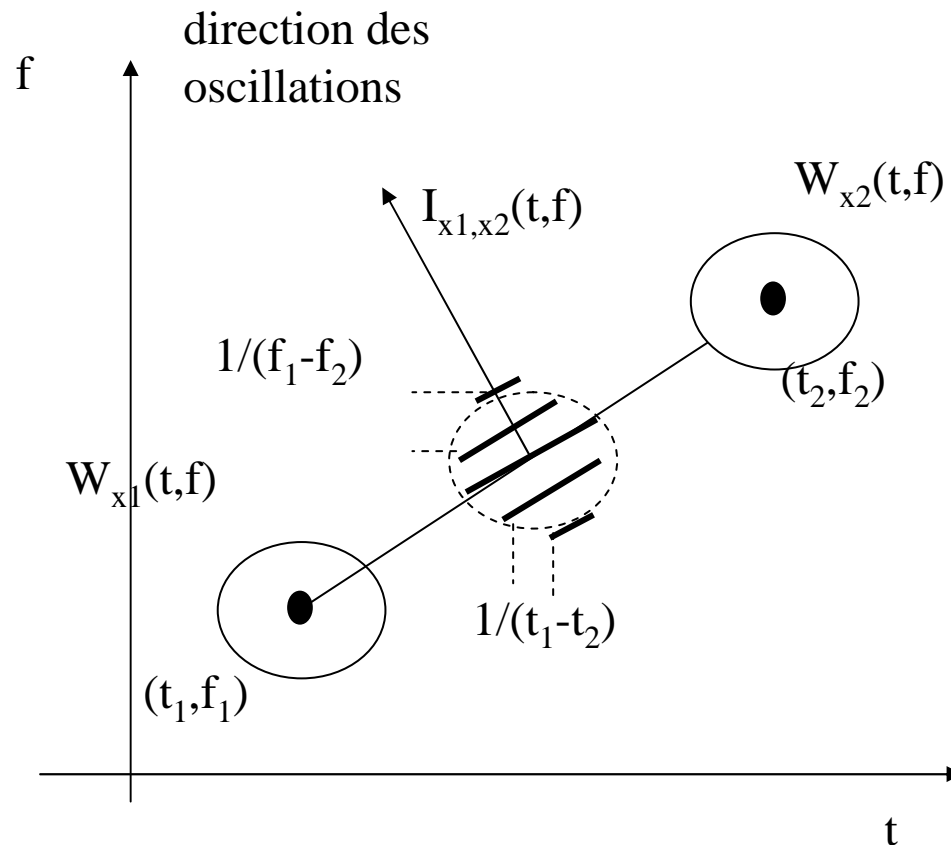
Soit : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ avec $x_1(t) = x_0(t - t_1)e^{j2\pi f_1 t}$
et $x_2(t) = x_0(t - t_2)e^{j2\pi f_2 t}$

Les termes d'interférences sont localisées autour

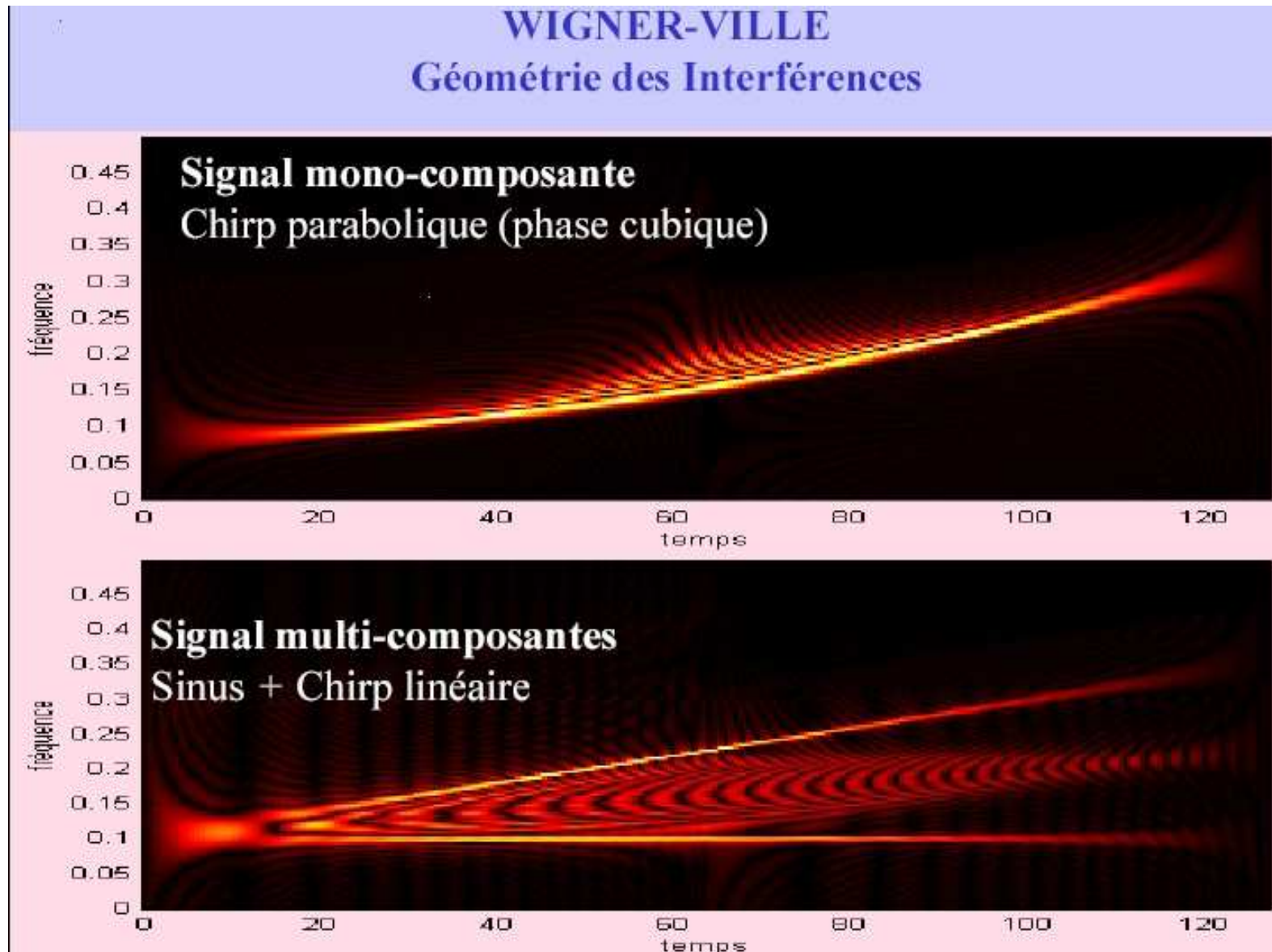
du temps $t_{12} = \frac{t_1 + t_2}{2}$ **et de la fréquence** $f_{12} = \frac{f_1 + f_2}{2}$

Distribution de Wigner-Ville (DWV) (suite)

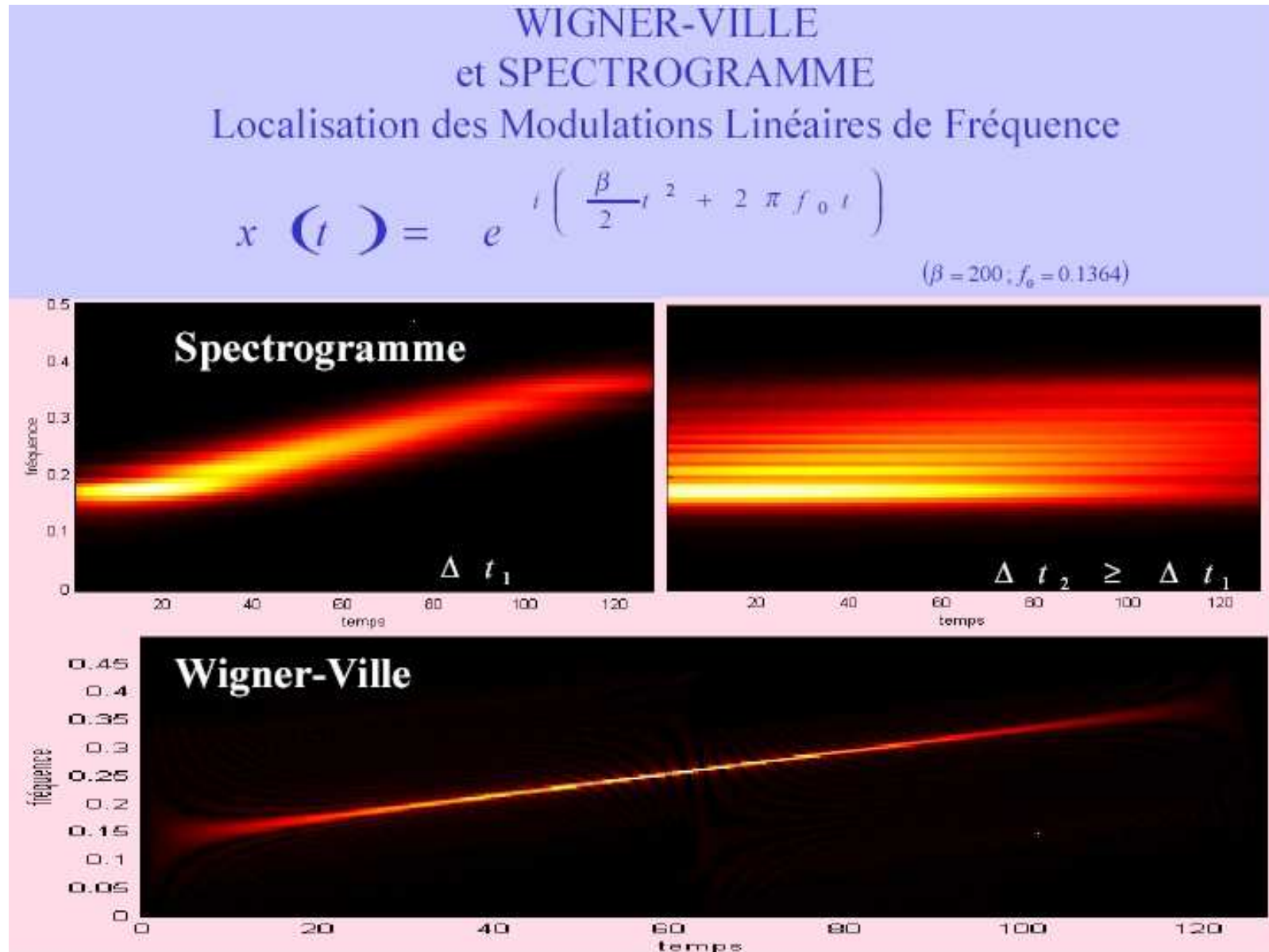
La fréquence des oscillations est $f_1 - f_2$ dans la direction du temps et la fréquence des oscillations est $t_1 - t_2$ dans la direction de la fréquence



Distribution de Wigner-Ville (DWV) (suite)



Distribution de Wigner-Ville (DWV) (suite)



Fonction d'Ambiguïté (FA)

Définition

$$\begin{aligned} A_{x,y}(\tau, \xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) y^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\xi t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(f + \frac{\xi}{2}\right) Y^*\left(f - \frac{\xi}{2}\right) e^{-j2\pi\xi\tau} df \end{aligned}$$

Fonction corrélative temps-fréquence

La DWV et la FA sont duales

$$A_{x,y}(\tau, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_{x,y}(t, f) e^{-j2\pi(\xi t - \tau f)} dt df$$

Réduction des interférences

Lissage des distributions de Wigner-Ville

Classe des DWV lissées (classe de Cohen) :

$$P_x(t, f, \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\xi(s-t)} \Phi(\tau, \xi) x(s + \frac{\tau}{2}) x^*(s - \frac{\tau}{2}) e^{-j2\pi f\tau} d\xi ds d\tau$$

Ou $P_x(t, f, \Phi) = W_x(t, f) ** \varphi(t, f)$

$\varphi(t, f)$ est la fonction de lissage de la DWV

Caractérisation dans le domaine des corrélations

dualité domaine des corrélations et domaine des distributions d'énergie :

$$W_x(t, f, \varphi) = W_x(t, f) ** \varphi(t, f)$$

$$\updownarrow 2D \text{ TF} \quad \updownarrow 2D \text{ TF} \quad \updownarrow 2D \text{ TF}$$

$$A_x(\tau, \xi, \Phi) = A_x(\tau, \xi) \times \Phi(\tau, \xi)$$

Lissage des distributions de Wigner-Ville (suite)

La Distribution de **Pseudo Wigner Ville (DPWV)** est une Wigner-Ville à court terme. On introduit une fenêtre temporelle h d'observation

$$PW_x(t, f) = \int_{\tau=-T_h}^{\tau=T_h} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) h^2\left(\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

La DPWV réalise un lissage dans la direction des fréquences uniquement

Les interférences ne seront pas atténuées dans la direction du temps

Le lissage "fréquentiel" sera important pour une fenêtre $h(t)$ courte

La **Distribution de Pseudo Wigner Ville lissée (DPWV lissée)** est une Pseudo-Wigner-Ville sur laquelle a été introduit une fenêtre fréquentielle g et donc un lissage temporel.

Le lissage temporel est indépendant du lissage fréquentiel.

Distribution de Choi-Williams

La distribution de Choi-Williams (CW) est une des nombreuses distributions qui proposent de réduire les termes d'interférences

La fonction noyau est une gaussienne paramétrée par une variance s

On retrouve la DWV pour s qui tend vers l'infini

$$CW_x(t, f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma}{|\tau|} e^{-2\sigma^2(s-t)^2/\tau^2} x\left(s + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(s - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} ds d\tau$$

Exemples

- **Analyse de signaux Sonar**
 - Signaux du fond sous-marin
 - Signaux de cibles acoustiques

Bibliographie

- P. Flandrin, *Temps-fréquence*, Hermès, Paris, 1993
- F. Hlawatsch et G.F. Boudreaux-Bartels, "Linear and Quadratic Time-Frequency Representations", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 9, N°2, April 1992
- F. Hlawatsch, "Time-Frequency Methods For Signal Processing", *Traitement du signal - développements récents*, Ecole pré-doctorale de physique, Session VI, Septembre 1993
- O. Rioul et M. Vetterli, "Wavelets and Signal Processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 8, N°4, October 1991
- M. Basseville, P. Flandrin, N. Martin, "Méthodes Temps-Fréquence", *Traitement du Signal*, Vol. 9, Supplément au N°1