A - les exercices sont indépendants -

1) Calculer ou simplifier les expressions suivantes:

a. $x(t) = \cos(\frac{\pi}{6}t) \times \delta(t - \frac{3}{2})$

b. $z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta(t + \frac{1}{2}) * \delta(t - 2)$

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\frac{\pi}{12}t) \times \delta(t-2)\, dt + \int_{-5}^{3} 2^{-t} \times \delta(t-1)\, dt$

2) rect(t) représente le signal rectangle normalisé.
Tracer sur l'intervalle [-3π ;3π] et sur un même graphique les 2 signaux suivants :
x(t)=sin t
y(t)= rect(sin t)

3) Soit $w(t)=A\exp(-B^2\pi t^2).\cos(2\pi f_0 t)$. On donne $TF(\exp(-\pi t^2))=\exp(-\pi f^2)$.

a. Donner l'expression W(f) de la transformée de Fourier de w(t)
b. Représenter graphiquement le module de W(f)

4) On considère un signal périodique x(t) de période T. Les coefficients de la série de Fourier de ce signal sont notés a_k et on rappelle $a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$

a. Quelle est la transformée de Fourier X(f) de ce signal.
b. Calculer la transformée de Fourier du peigne de Dirac $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT)$

5) Soit S le système linéaire invariant en temps, caractérisé par sa relation entre l'entrée x[n] et la sortie y[n] :

$$y[n] = \frac{1}{8}\{x[n] + 3x[n-1] + 3x[n-2] + x[n-3]\}$$

a) Donner la réponse impulsionnelle h[n] de ce système.

b) En raisonnant sur les propriétés de la réponse impulsionnelle, préciser si ce système est stable et causal

c) Calculer H(f) la Transformée de Fourier de h[n].
On rappelle que $(1+a)^3=1 + 3a + 3a^2 + a^3$

d) Tracer le module de H(f) sur l'intervalle -1 à 1.

6) Le système suivant est-il linéaire, invariant en temps, causal, stable ?
y[n]= cos[n].x[n+2]

- B -

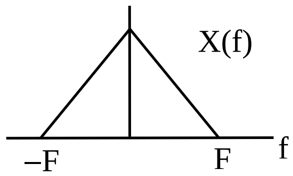
On considère le signal continu x(t), de transformée de Fourier X(f).

1) Soit le signal y(t), égal à x(t) retardé de la durée D.
Exprimer y(t) en fonction de x(t). Exprimer Y(f), transformée de Fourier de y(t) en fonction de X(f).
2) On considère le signal z(t) = x(t) + y(t).
Exprimer Z(f), en fonction de X(f). Montrer que Z(f), transformée de Fourier de z(t), peut s'écrire sous la forme A(f) · X(f).
3) Tracer |A(f)|, module de A(f) sur une période. On notera soigneusement les maxima et les passages par zéro de |A(f)|.
4) On considère le cas particulier $x(t) = \cos(\frac{2\pi}{P} t)$.
   a) Rappeler l'expression de X(f) pour ce cas particulier.
   b) On considère un retard D tel que 0 < D < P. Pour quelle valeur de D a-t-on z(t) = 0 ? Justifier graphiquement votre réponse.
   c) En utilisant l'expression de Z(f) pour la forme particulière de X(f), montrer que l'on a :

$$\cos[\frac{2\pi}{P} t] + \cos[\frac{2\pi}{P}(t - \frac{P}{4})] = \sqrt{2}\cos[\frac{2\pi}{P}(t - \frac{P}{8})]$$

- C -

On considère un signal continu x(t), de spectre X(f), borné par les fréquences [-F , +F]. On supposera dans la suite que X(f) est de la forme suivante :



Ce signal est utilisé pour moduler en amplitude une porteuse sinusoïdale de fréquence f_0. Le signal résultant de cette modulation est donc : $y(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$.

On prendra dans la suite : F = 5 kHz et f_0 = 70 kHz.
Toutes les représentations des spectres fréquentiels seront données dans l'intervalle -80 à +80 kHz

1) Représenter Y(f), spectre de y(t) (justifier graphiquement, sans calcul)
2) On échantillonne y(t) avec une fréquence d'échantillonnage Fe. En appliquant le théorème de Shannon, quelle doit être la valeur minimum de Fe ?
3) On décide d'échantillonner y(t) avec Fe = 40 KHz. On appelle $y_e(t)$ le signal échantillonné obtenu. Représenter soigneusement le spectre de $y_e(t)$ (justifier sans calcul).
4) Qu'obtient-on en filtrant $y_e(t)$ avec un filtre passe-bande idéal dont la bande passante va de 65 à 75 kHz ?
5) Qu'obtient-on en filtrant $y_e(t)$ avec un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure 20 kHz ?
6) Quel est l'intérêt pratique de cette méthode d'échantillonnage / reconstruction ?

- D-

On désire réaliser un filtre numérique dont la fonction de transfert est donnée par H(f) avec :

$$H(f) = \frac{1}{1- ae^{-j6\pi f}} \qquad \text{avec } 0 < a < 1$$

1) Représenter schématiquement le module de H(f) pour f entre . On indiquera soigneusement les valeurs et les positions de minima et maxima.

2) Etude de la réponse impulsionnelle du filtre

a. On considère la réponse de ce filtre à une entrée quelconque. On notera :

$$E(f) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow S(f)$$

En utilisant l'expression de H(f), montrer que S(f) peut s'écrire sous la forme (on donnera A(f)):

$$S(f) = E(f) + A(f)\, S(f)$$

b. En utilisant la relation précédemment obtenue et les propriétés de la transformée de Fourier d'un signal discret, donner l'expression de s[n] en fonction de e[n] et s[n- 3].

c. On appelle h[n] la réponse impulsionnelle correspondant au filtre H(f). On a donc :

$$e[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow s[n]$$

En utilisant l'expression précédemment obtenue, calculer échantillon par échantillon la réponse du système discret lorsque l'entrée est l'impulsion unité $\delta[n]$ (on considérera pour ce calcul que s[n]=0 si n < 0).

d. Représenter alors h[n]. Quelle est l'étendue de h[n] ? Le filtre correspondant à h[n] est-il réalisable en pratique par convolution discrète ?

3) On décide d'obtenir une approximation du filtre en considérant H[k], qui est la DFT calculées <u>sur les N 1ers points</u> de h[n].

a. Quelle est la relation qui lie H[k] et H(f) ?

b. Soit $h_1[n]$ la DFT inverse de H[k]. Comment peut-on obtenir $h_1[n]$ à partir de h[n] ? Sur quel intervalle doit-on étudier $h_1[n]$?

c. On impose dans la suite N=12. Montrer alors que l'on a sur l'intervalle d'étude :

- $h_1[n] = 0$ si n n'est pas multiple de 3
- $h_1[n] = a^L/(1-a^4)$ si n est multiple de 3 de la forme n = 3L

d. Représenter graphiquement $h_1[n]$ ainsi obtenu.

e. On considère l'entrée particulière $e[n] = \delta[n] - a\,\delta[n-3]$. Représenter graphiquement e[n].

Calculer et représenter graphiquement la sortie du système de réponse impulsionnelle $h_1[n]$ lorsque l'entrée vaut e[n].

f. Considérant la réponse impulsionnelle h du système S, on peut dire que S est un système qui modélise la réverbération acoustique.

Expliquer comment la réponse à la question précédente peut apporter des idées pour concevoir un filtre anti-réverbération ?