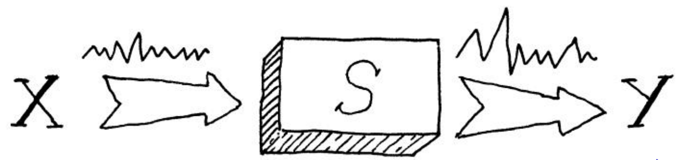
Signaux Aléatoires et Systèmes Linéaires

1. Motivation
2. Relations fréquentielles fondamentales
3. Cas des systèmes bruités
4. Identification des fonctions de transfert

Master MEGA
Jérôme Antoni LVA,INSA-Lyon

Motivation



X aléatoire

Y aléatoire

- Quelles sont les relations entre les descripteurs statistiques de $X(t)$ et ceux de $Y(t)$?
- On privilégie les descripteurs fréquentiels:

$$S_X(f)df = \mathbb{E}\left\{\left|dX(f,\omega)\right|^2\right\} \qquad S_Y(f)df = \mathbb{E}\left\{\left|dY(f,\omega)\right|^2\right\} \qquad \textit{DSP}$$

$$S_{YX}(f)df = \mathbb{E}\left\{dY(f,\omega)dX^*(f,\omega)\right\} \qquad \textit{DISP}$$

Densité Inter-Spectrale de Puissance (nombre complexe!)

Principe

- Rappel:

$$\left.\begin{array}{l} X(t,\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} dX(f,\omega) \\[2ex] Y(t,\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} dY(f,\omega) \end{array}\right\} \quad Y(t,\omega) = h(t) * Y(t,\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{dY(f,\omega) = H(f)\cdot dX(f,\omega)}$$

Relations fréquentielles fondamentales

1) $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$ *DSP de la sortie*

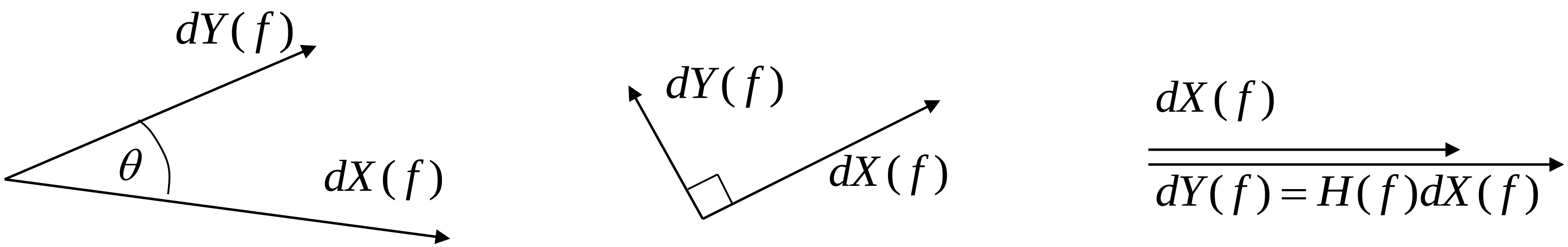
2) $S_{YX}(f) = H(f) S_X(f)$ *DISP entre la sortie & l'entrée*

3) $S_Y(f) = H(f) S_{XY}(f)$ *DSP de la sortie*

4) $$\gamma_{YX}^2(f) = \frac{|S_{YX}(f)|^2}{\underbrace{S_X(f) S_Y(f)}_{\text{« coefficient de corrélation » à la fréquence } f}} = 1$$ *Fonction de cohérence entre la sortie & l'entrée*

Interprétation de la fonction de cohérence

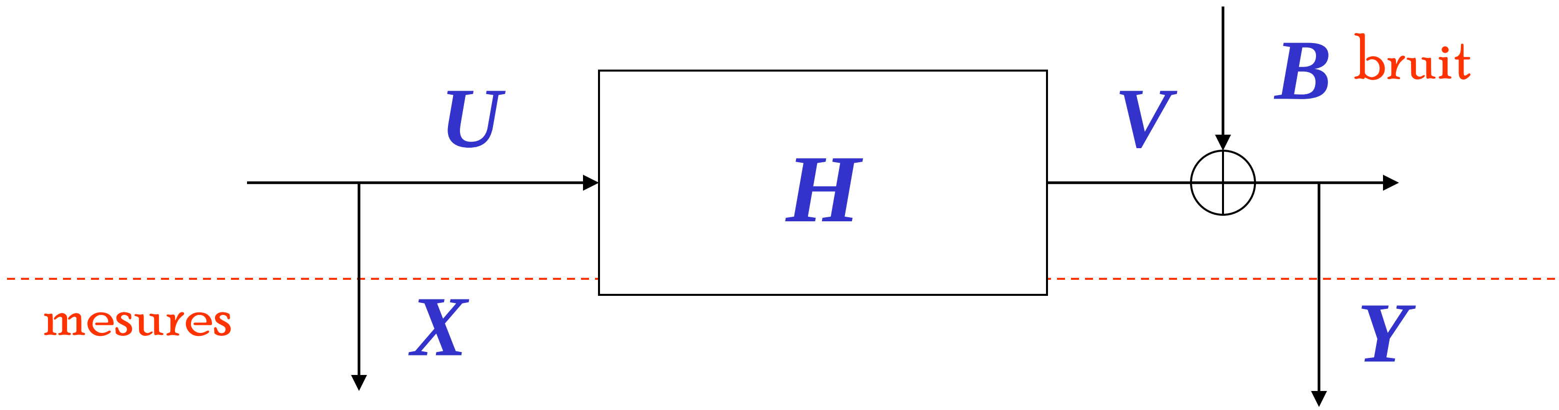
$$\gamma_{YX}^{2}(f)=\frac{\left|\langle dY(f);dX(f)\rangle\right|^{2}}{\left\|dY(f)\right\|^{2}\cdot\left\|dX(f)\right\|^{2}}=\cos^{2}(\theta)$$



- Si X et Y sont décorrélés à la fréquence f, alors $\gamma_{YX}{}^{2}(f) = 0$
- Si X et Y sont linéairement liés à la fréquence f (corrélation parfaite), alors $\gamma_{YX}{}^{2}(f) = 1$
- Sinon,

$$0\le\gamma_{YX}^{2}(f)\le 1$$

Cas des systèmes bruités: bruit sur la sortie

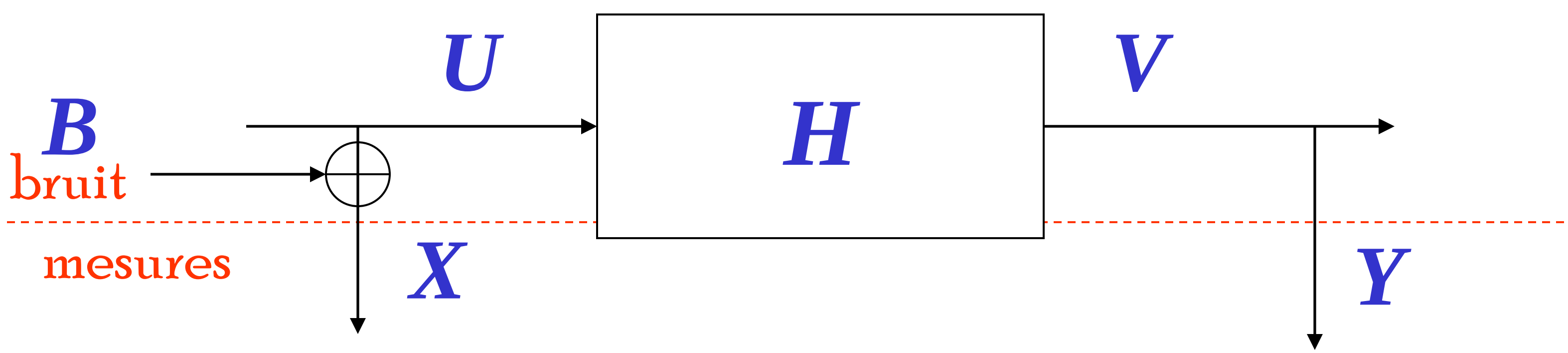


$$\begin{cases} X(t) = U(t) \\ Y(t) = V(t) + B(t) \\ Y(t) = h(t) * X(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_X(f) = S_U(f) \\ S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_U(f) + S_B(f) \end{cases}$$

$$\gamma_{YX}^2(f) = \frac{|S_{YX}(f)|^2}{S_X(f) S_Y(f)} = \frac{|H(f)|^2 \cdot |S_U(f)|^2}{S_U(f)\left[|H(f)|^2 S_U(f) + S_B(f)\right]} = \frac{1}{1 + \frac{S_B(f)}{S_V(f)}}$$

$$\boxed{0 \leq \gamma_{YX}^2(f) \leq 1}$$

Cas des systèmes bruités: bruit sur l'entrée



$$\begin{cases} X(t) = U(t) + B(t) \\ Y(t) = V(t) \\ Y(t) = h(t) * X(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_X(f) = S_U(f) + S_B(f) \\ S_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_U(f) \end{cases}$$

$$\gamma_{YX}^2(f) = \frac{|S_{YX}(f)|^2}{S_X(f) S_Y(f)} = \frac{|H(f)|^2 \cdot |S_U(f)|^2}{[S_U(f) + S_B(f)]|H(f)|^2 S_U(f)} = \frac{1}{1 + \frac{S_B(f)}{S_U(f)}}$$

$$\boxed{0 \leq \gamma_{YX}^2(f) \leq 1}$$

Identification des fonctions de transfert

- Problématique: estimer $H(f)$ à partir des mesures (éventuellement bruitées) $X(t)$ et $Y(t)$.

- Cas sans bruit (peu réaliste):

$$\hat{H}(f)=\frac{S_{YX}(f)}{S_X(f)}=\frac{S_Y(f)}{S_{XY}(f)}$$

- Cas avec bruit sur la sortie:

$$\boxed{\hat{H}(f)=\frac{S_{YX}(f)}{S_X(f)}=\frac{S_{VU}(f)}{S_U(f)}} \qquad H_1$$

mais $$\hat{H}(f)=\frac{S_Y(f)}{S_{XY}(f)}=\frac{S_V(f)+S_B(f)}{S_{UV}(f)}\neq\frac{S_V(f)}{S_{UV}(f)}$$

Identification des fonctions de transfert

- Cas avec bruit sur l'entrée:

$$\boxed{\hat{H}(f) = \frac{S_Y(f)}{S_{XY}(f)} = \frac{S_V(f)}{S_{UV}(f)}} \qquad H_2$$

mais

$$\hat{H}(f) = \frac{S_{YX}(f)}{S_X(f)} = \frac{S_{VU}(f)}{S_U(f) + S_B(f)} \neq \frac{S_{VU}(f)}{S_U(f)}$$