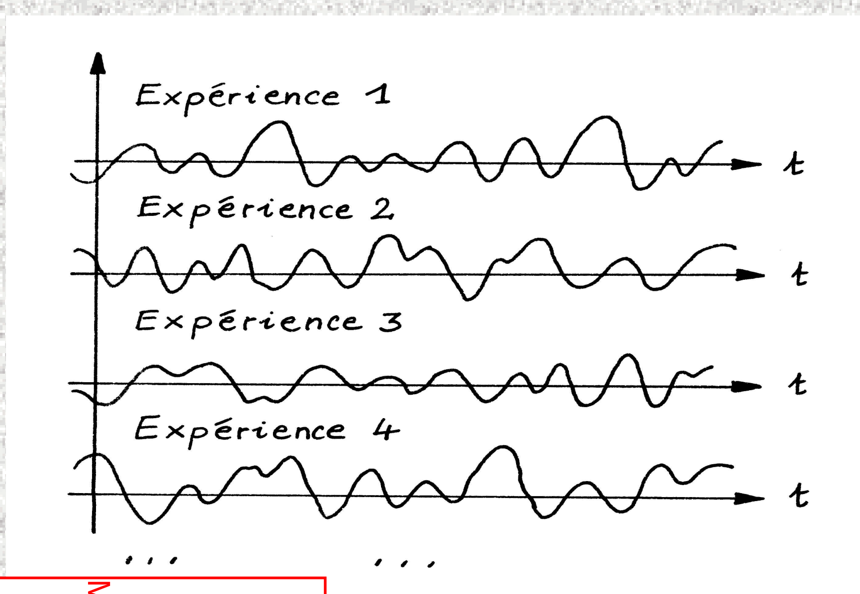
Signaux Aléatoires

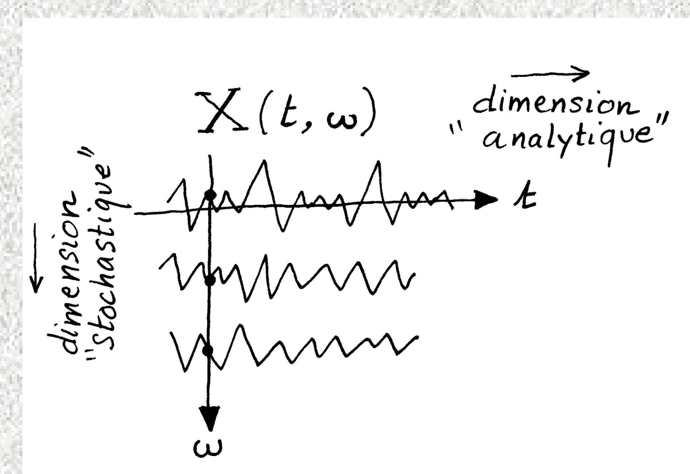
1. Définition
2. Descripteurs statistiques
3. Propriétés : stationnarité, ergodicité
4. Estimation
5. Exemples

Master MEGA
Jérôme Antoni LVA,INSA-Lyon

Définition

- Un signal aléatoire (ou processus stochastique) est un signal qui ne se répète pas à l'identique lorsque l'on réitère l'expérience qui le produit.
- On le note $X(t,\omega)$ où ω est une épreuve (variable aléatoire qui traduit un tirage aléatoire).
- $x(t,\omega_i)$ est une réalisation de $X(t,\omega)$ pour un tirage particulier ω_i





Maste

Exemples

1. Bruit blanc = séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

2. Sinusoïde avec phase aléatoire

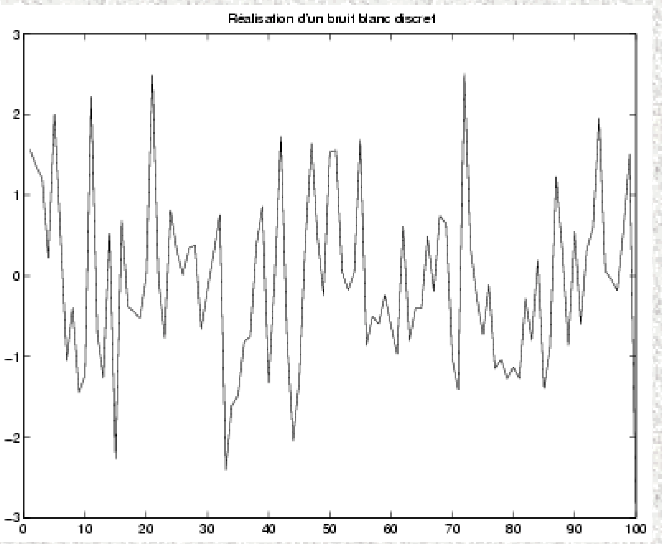
$$X(t) = A\sin(2\pi f_0 t + \Phi)$$

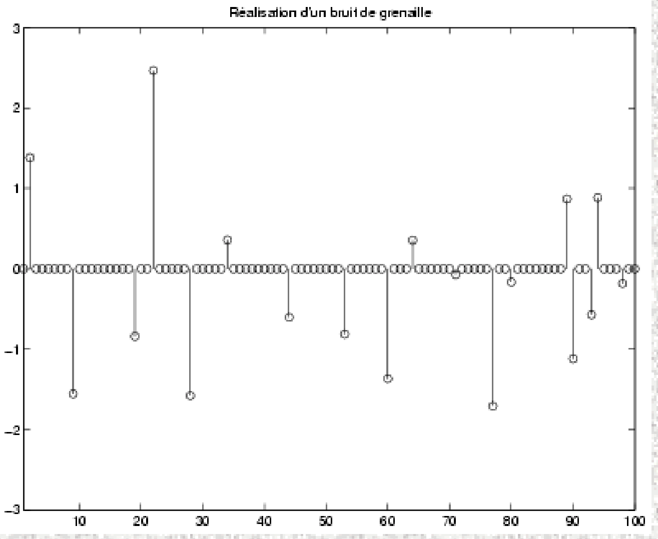
3. Sinusoïde avec amplitude aléatoire

$$X(t) = \boldsymbol{A}\sin(2\pi f_0 t + \phi)$$

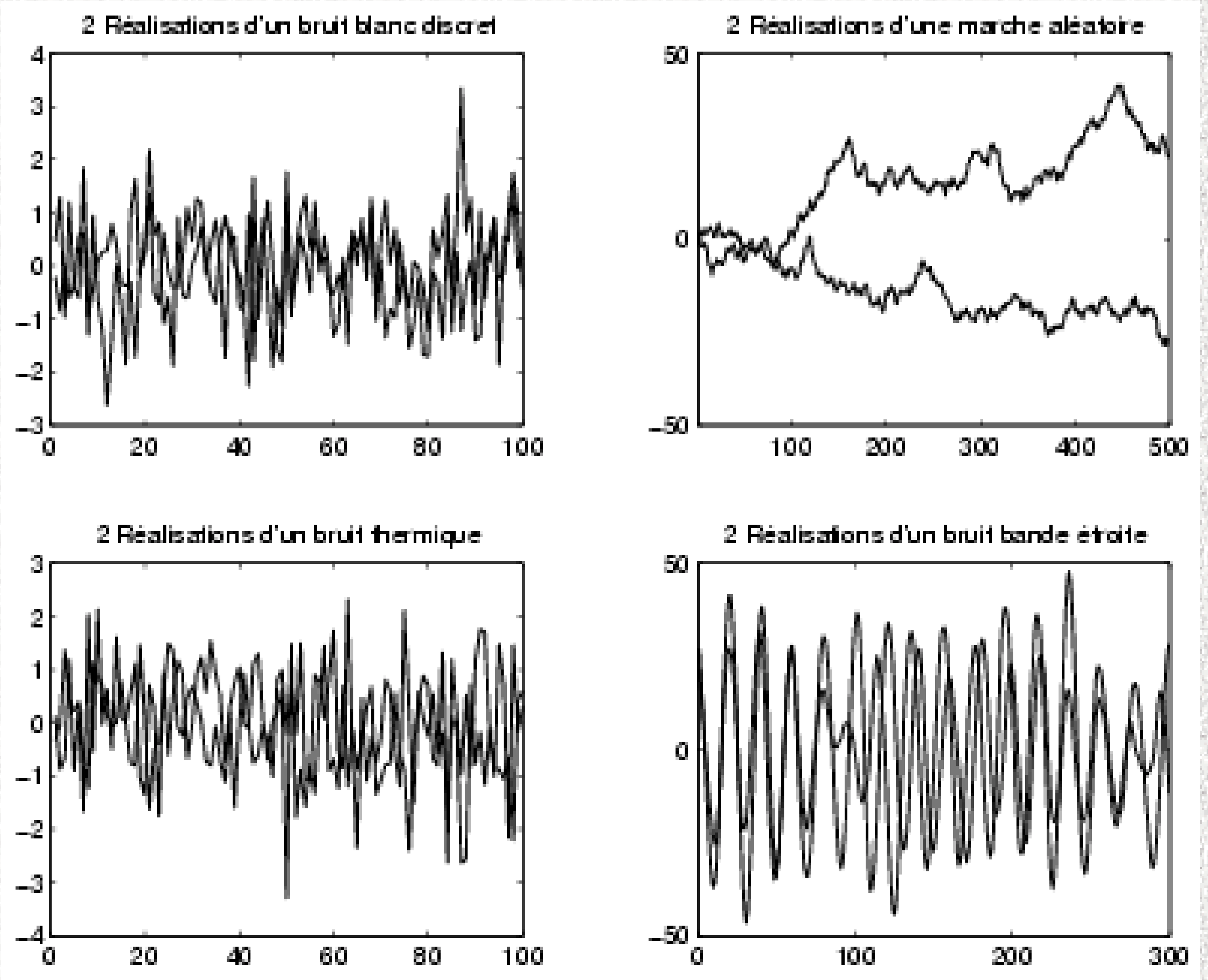
4. Bruit de grenaille

$$X(t) = \sum_i \boldsymbol{A_i}\delta(t - \boldsymbol{\tau}_i)$$





Autres exemples

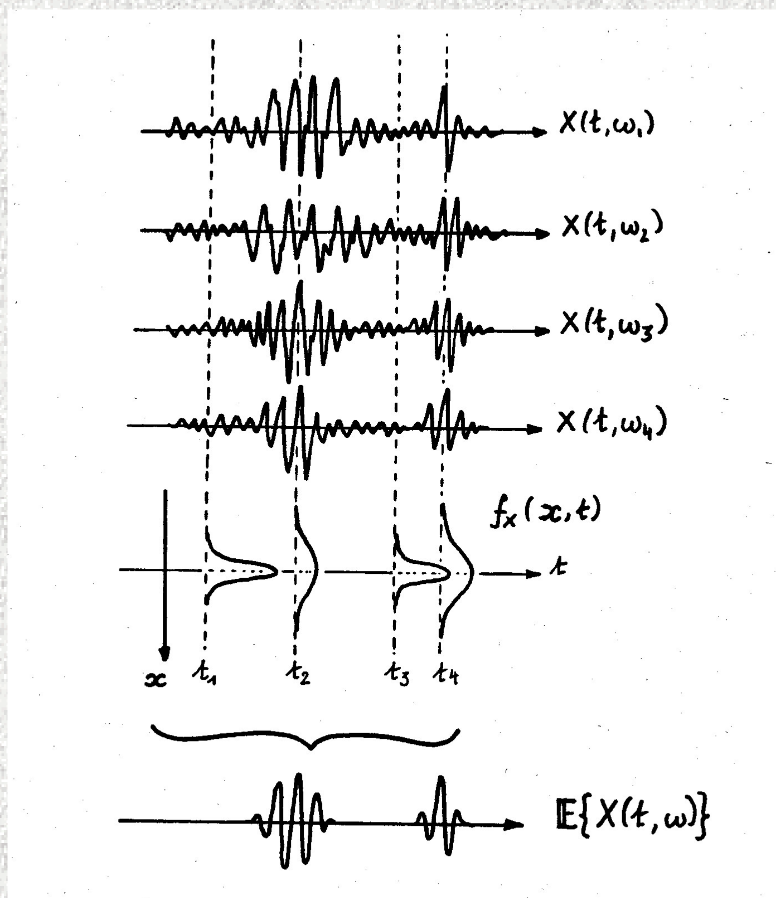


Descripteurs statistiques (1er ordre)

- Espérance mathématique = Moyenne d'ensemble

$$m_X(t) = E\{X(t,\omega)\}$$

→ indicateur de position moyenne du signal à l'instant t



Descripteurs statistiques (2ème ordre)

- Puissance instantanée = Moyenne quadratique

$$P_X(t) = E\left\{\left|X(t,\omega)\right|^2\right\}$$

→ mesure la puissance moyenne du signal en un instant *t*

Justification du terme

$$P_X(t) \underset{\Delta t \to 0}{=} \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} E\left\{\left|X(t,\omega)\right|^2\right\} dt$$

Descripteurs statistiques (2ème ordre)

- Variance

$$V_X(t) = E\left\{ \left| X(t,\omega) - m_X(t) \right|^2 \right\}$$

→ mesure la PI des fluctuations aléatoires autour de la moyenne (indicateur de dispersion)

- Ecart-type

$$\sigma_X(t) = \sqrt{V_X(t)}$$

→ comme la variance, mais exprimé dans les mêmes unités que le signal

- Les descripteurs précédents caractérisent le comportement du signal (position moyenne, dispersion) en un instant t.

- Ils ne permettent pas d'analyser les relations (dépendance) qui existent entre les échantillons.

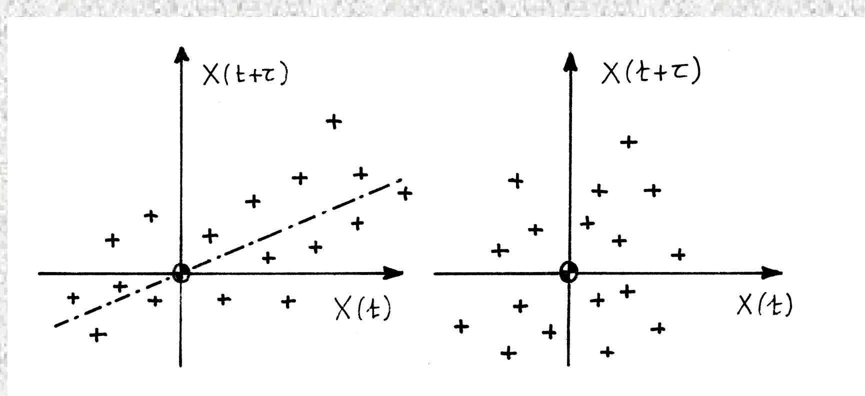
- Il faut un indicateur qui mesure avec quelle « force » la valeur d'un échantillon à l'instant $t+\tau$ dépend de la valeur à l'instant t.

La fonction d'autocorrélation

- Définition

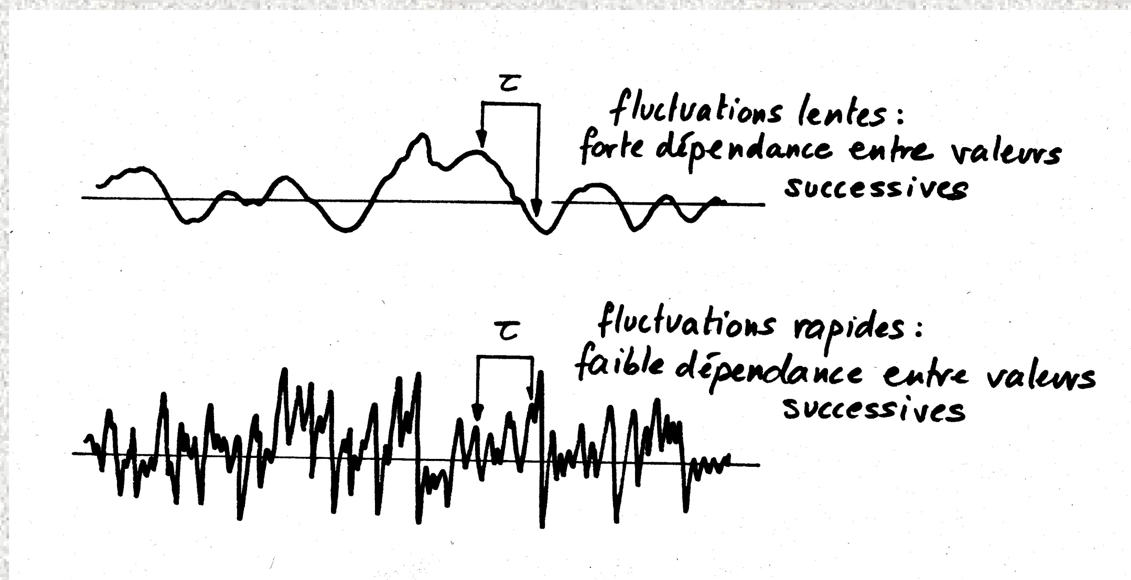
$$R_X(t,\tau) = E\left\{X(t+\tau)X(t)\right\}$$

→ elle mesure la corrélation (ou le produit scalaire ou la projection au sens stochastique) entre $X(t+\tau)$ et $X(t)$

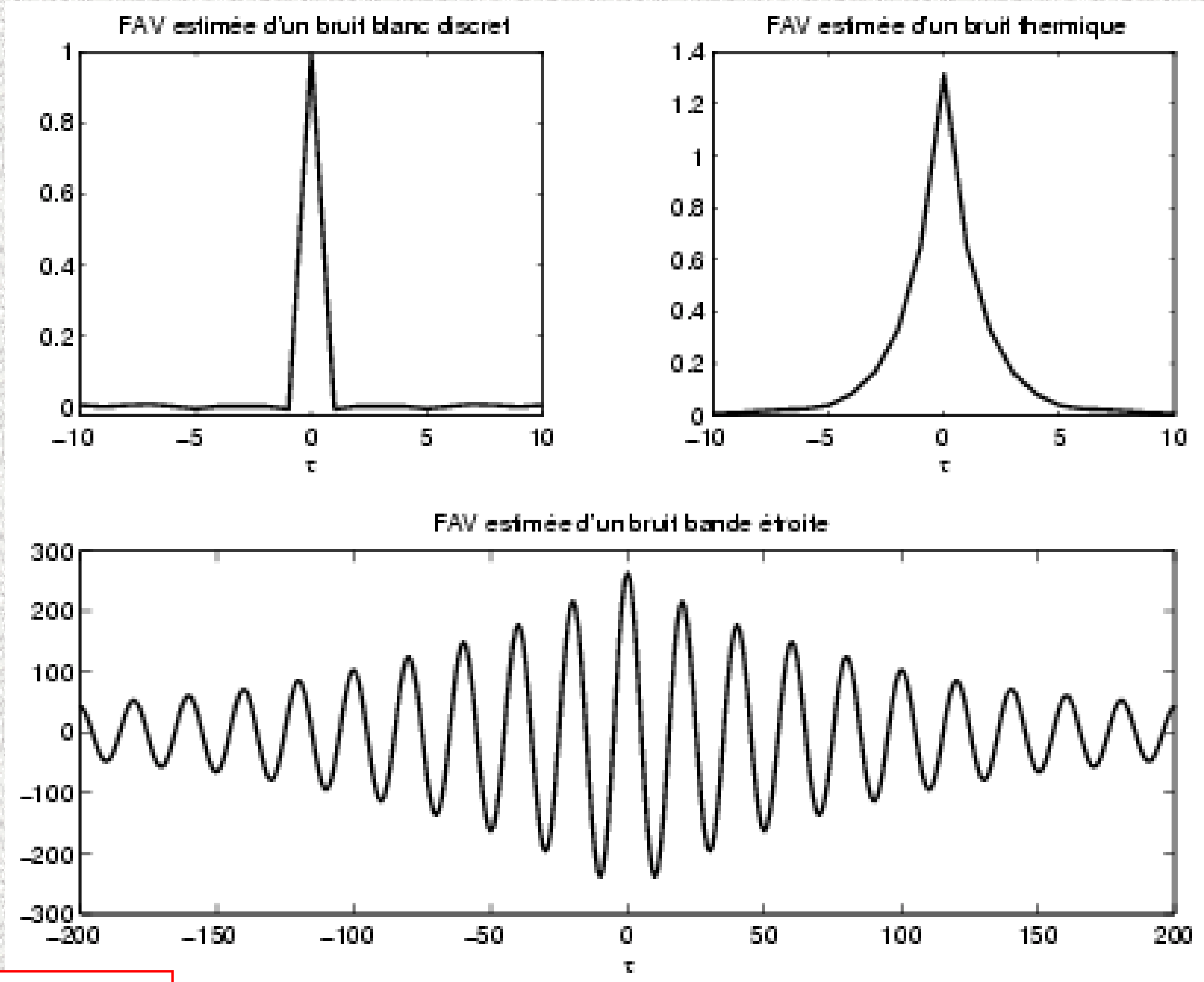


Interprétation

- Un signal très corrélé à des fluctuations lentes (apparence « lisse »)
- Un signal peu corrélé avec lui-même a des fluctuations très rapides (apparence « chaotique »)



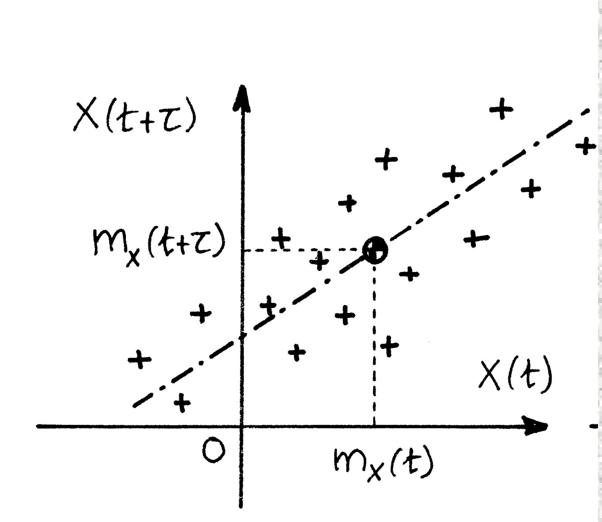
Exemples


FAV estimée d'un bruit blanc discret
FAV estimée d'un bruit thermique
FAV estimée d'un bruit bande étroite
τ
τ
τ

La fonction d'autocovariance

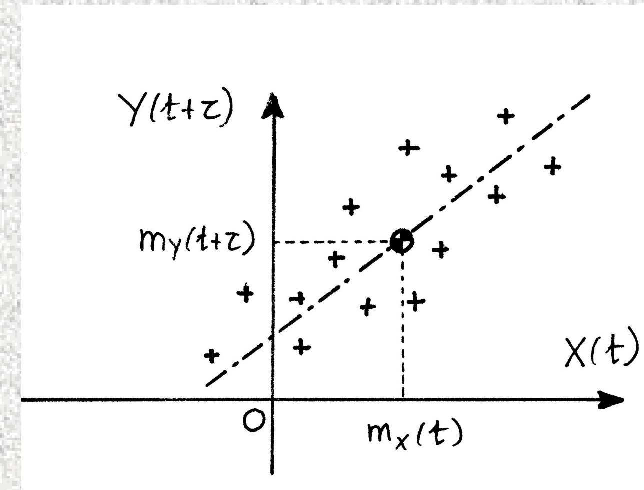
- Cas particulier des signaux non centrés : on s'intéresse seulement à la corrélation entre les fluctuations autour de la moyenne, ce qui définit la fonction d'autocovariance

$$C_X(t,\tau) = E\{[X(t+\tau) - m_X(t+\tau)][X(t) - m_X(t)]\}$$
$$= R_X(t,\tau) - m_X(t+\tau)m_X(t)$$



Fonctions d'intercorrélation et d'intercovariance

- On s'intéresse aux corrélations entre échantillons de deux signaux aléatoires distincts $X(t)$ et $Y(t)$:



FIC

$$R_{YX}(t,\tau) = E\left\{Y(t+\tau)X(t)\right\}$$

FIV

$$C_{YX}(t,\tau) = E\left\{\left[Y(t+\tau) - m_Y(t+\tau)\right]\left[X(t) - m_X(t)\right]\right\}$$

$$= R_{YX}(t,\tau) - m_Y(t+\tau)m_X(t)$$

Propriétés: la stationnarité

- Définition: *Un signal aléatoire stationnaire est un signal dont les statistiques ne dépendent pas du temps.*

$$m_X(t) = m_X$$
$$P_X(t) = P_X$$
$$V_X(t) = V_X$$

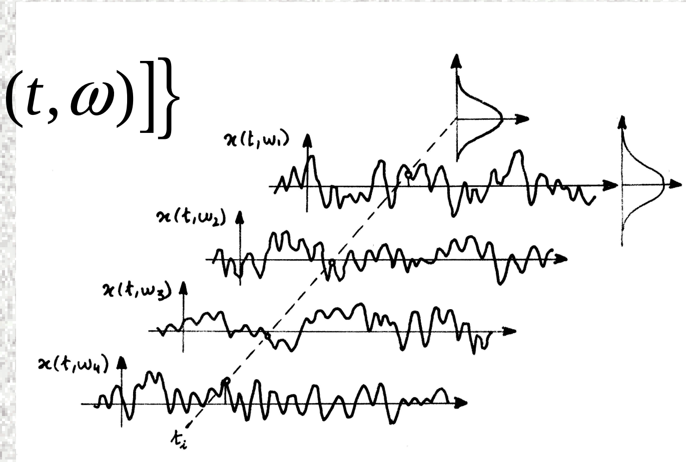
$$R_{YX}(t,\tau) = R_{YX}(\tau)$$
$$C_{YX}(t,\tau) = C_{YX}(\tau)$$

- Remarque 1: *En pratique, on est pratiquement toujours obligé de faire cette hypothèse pour des raisons d'estimations.*
- Remarque 2: *La stationnarité est en quelque sorte aux signaux aléatoires ce que la périodicité est aux signaux déterministes. C'est dans tout les cas une idéalisation!!*

Propriétés: l'ergodicité

- Définition: *Un signal aléatoire est dit* ergodique *(au sens fort) si*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} g\left[X(t,\omega)\right]dt = E\left\{g\left[X(t,\omega)\right]\right\}$$



- ... ce qui implique en particulier:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} X(t,\omega)dt = m_X$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} Y(t+\tau,\omega)X(t,\omega)dt = R_{YX}(\tau)$$

Moyenne temporelle =
Moyenne d'ensemble

Estimation

- Un séquence $\{X[n]\}$, n=0,…,N-1 stationnaire et ergodique possède les estimateurs suivants de la moyenne et de la FAC:

$$\hat{m}_X = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]$$

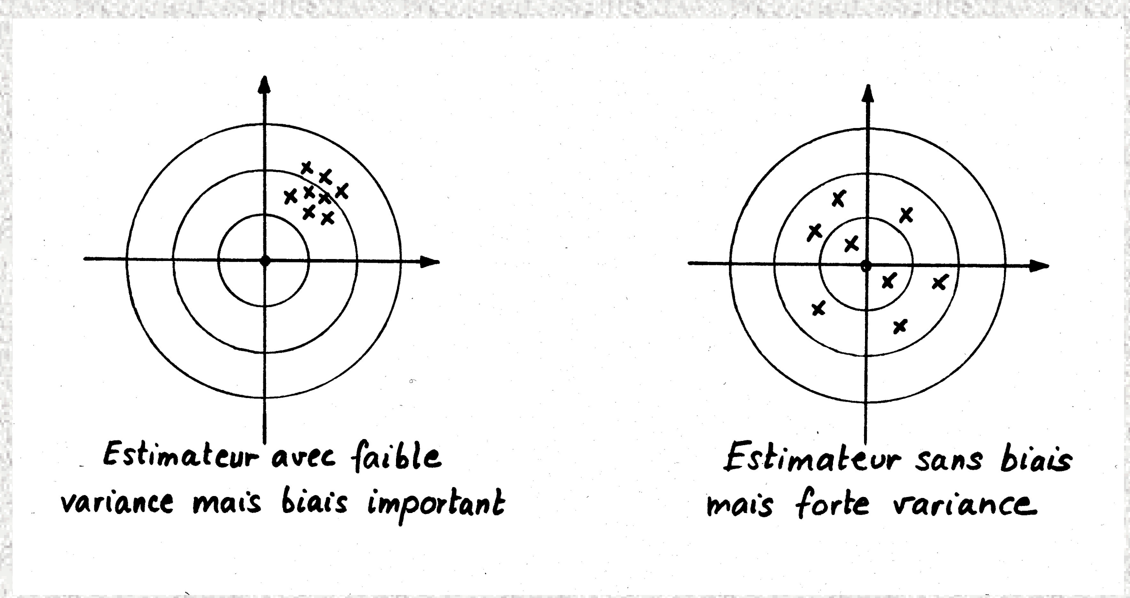
$$\hat{R}_{YX}[k] = \frac{1}{N-|k|}\sum_{n=\max(-k,0)}^{N-1-\max(k,0)} Y[n+k]X[n]$$

$$\hat{R}_{YX}[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=\max(-k,0)}^{N-1-\max(k,0)} Y[n+k]X[n]$$

estimateur biaisé, mais préféré

→ Stationnarité +ergodicitré sont nécessaires en pratique pour pouvoir calculer les descripteurs statistiques d'un signal aléatoire

Variance et biais des estimateurs



• La variance est diminuée en augmentant le nombre de moyennes (N)

• Le biais existe si en moyenne l'estimateur n'est pas égal à la quantité qu'il estime $E\{\hat{\theta}\} \neq \theta$