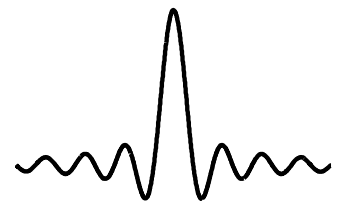
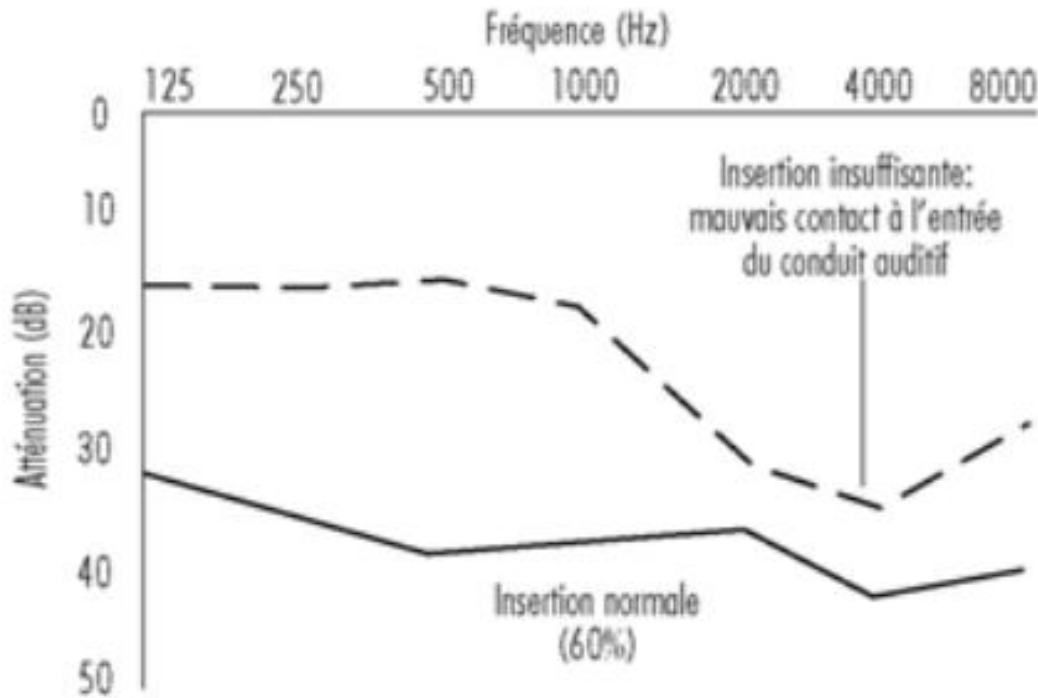


Filtrage linéaire des signaux

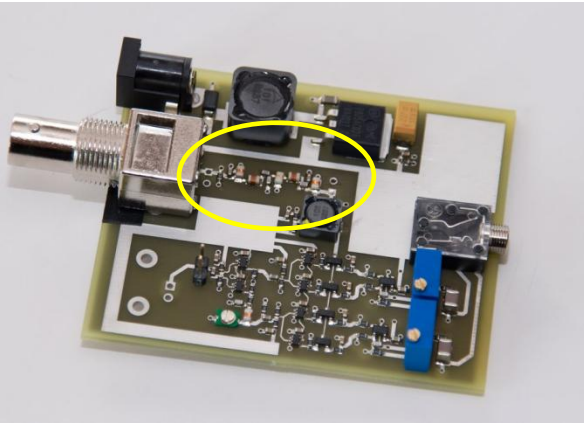


Filtrage du son réalisé par un « bouchon d'oreille »

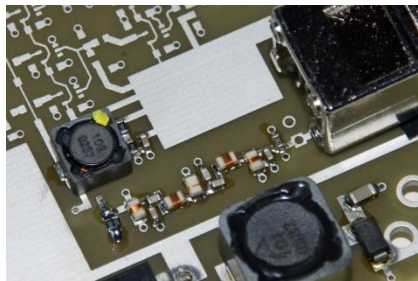


Le filtrage réalisé par le « bouchon d'oreille » dépend de son positionnement

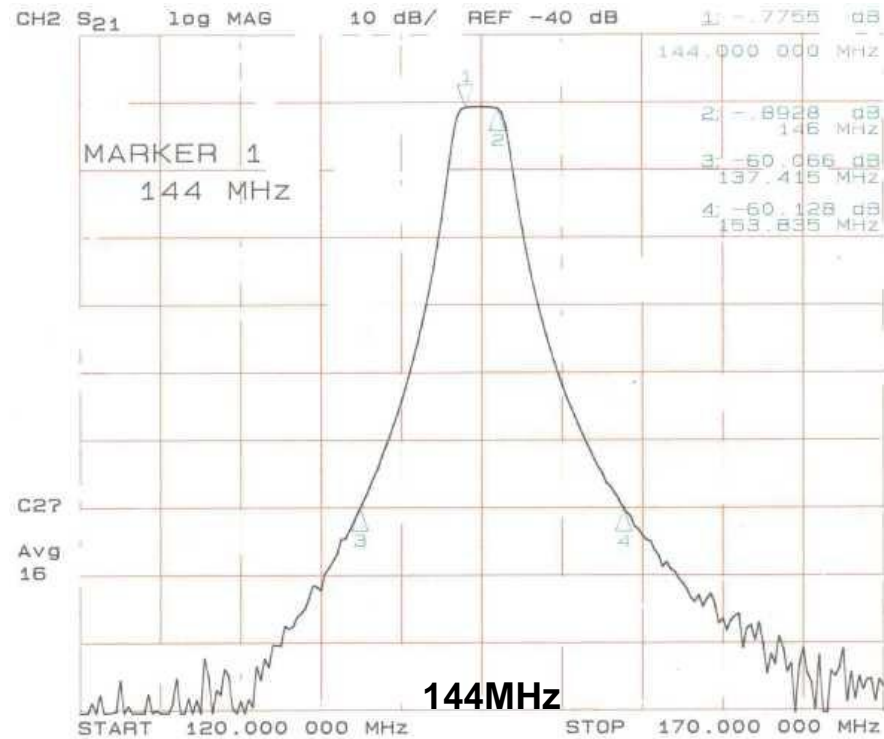
Filtre analogique : réponse du filtre d'entrée d'un récepteur VHF 144MHz



Récepteur d'ondes radio VHF 144MHz



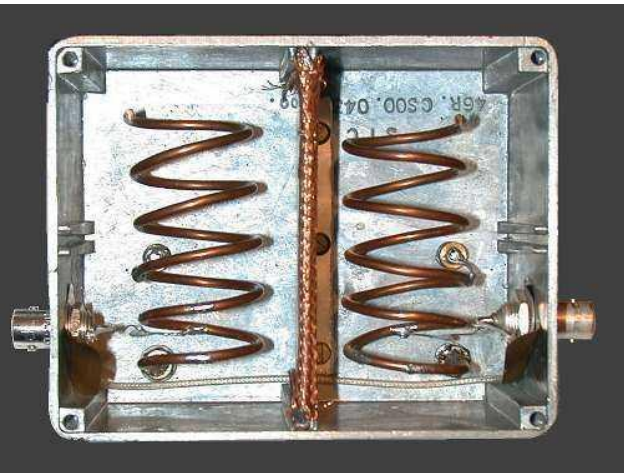
Zoom sur le filtre d'entrée



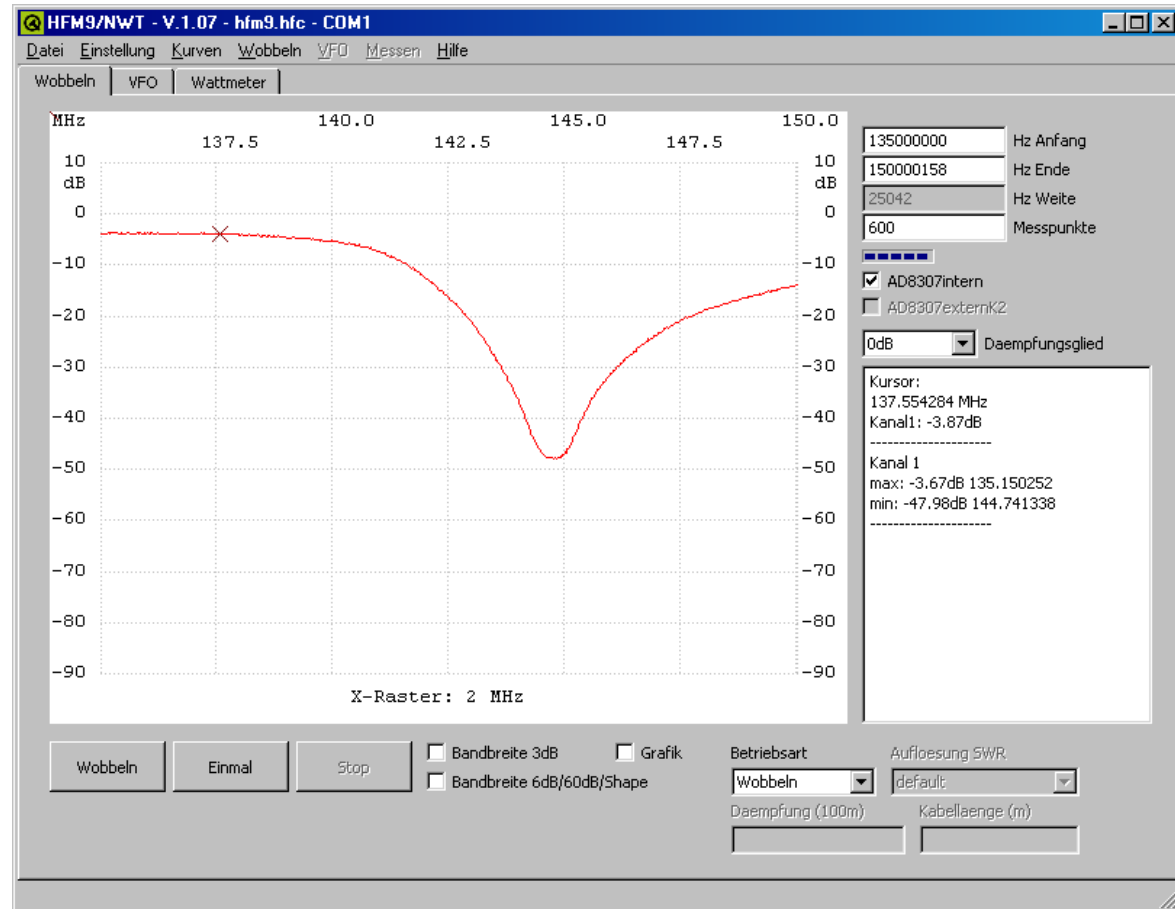
Réponse en fréquence du filtre **passé-bande** d'entrée, centré sur 144MHz

Filtre de réjection (coupe bande) autour de 144MHz

Objectif : améliorer la réception des signaux de provenant de satellites météorologiques (137-138MHz) qui sont perturbés par les radios amateurs VHF à 144MHz.



Filtre analogique LC



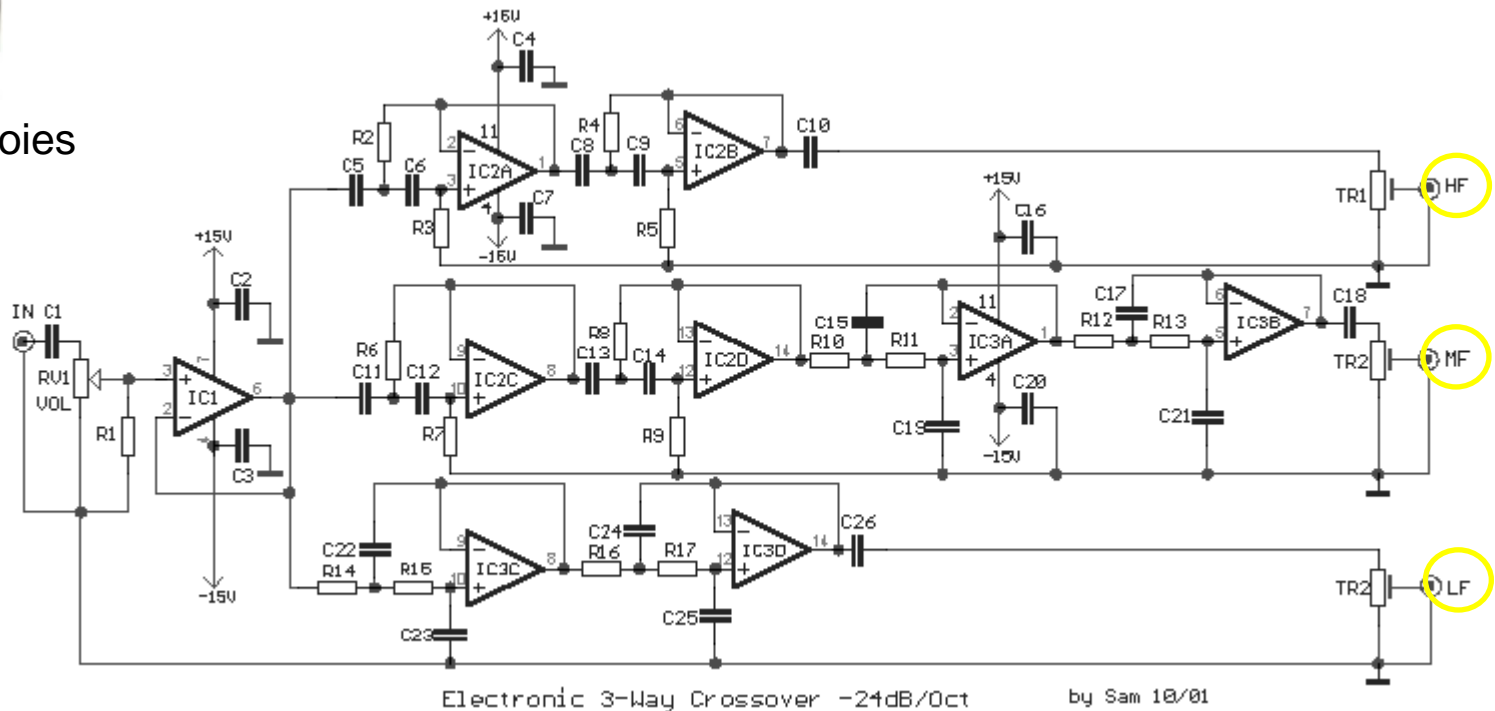
Réponse en fréquence du filtre coupe-bande centré sur 144MHz

Filtre 3 voies pour enceintes audio HIFI

Objectif : filtrer le signal sonore pour l'adapter à chacun des 3 haut-parleurs : aigu (HF, filtre passe-haut), médium (MF, filtre passe-bande) et grave (LF, filtre passe-bas)



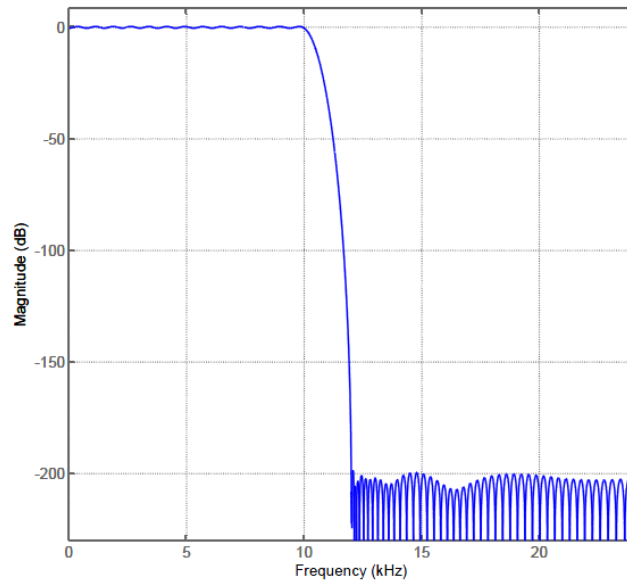
Enceintes HIFI 3 voies



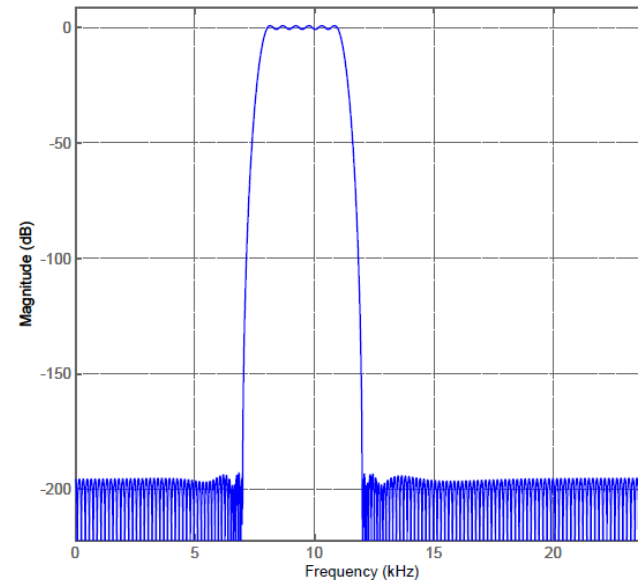
Filtre 3 voies 24 dB/octave

L'opération de filtrage permet de modifier les amplitudes des composantes fréquentielles d'un signal

- Un filtre linéaire est défini comme un système linéaire et invariant en temps
- Le filtre est défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou son gain complexe $H(f)$
- La réponse fréquentielle $H(f)$ est la transformée de Fourier de réponse impulsionnelle $h(t)$
- Le signal filtré est le résultat de la convolution entre le signal et la réponse impulsionnelle $h(t)$



Exemple du module de la réponse fréquentielle d'un filtre **passé-bas**.
Fréquence de coupure à 10kHz.

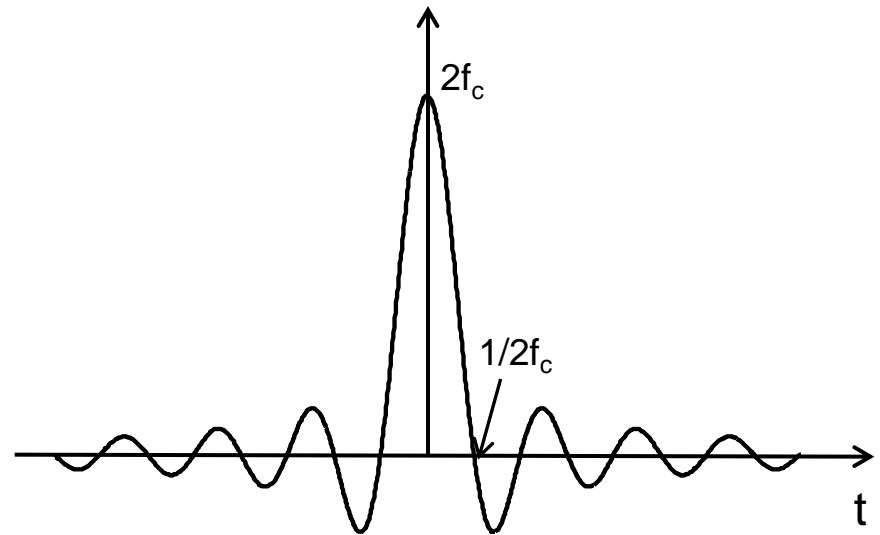
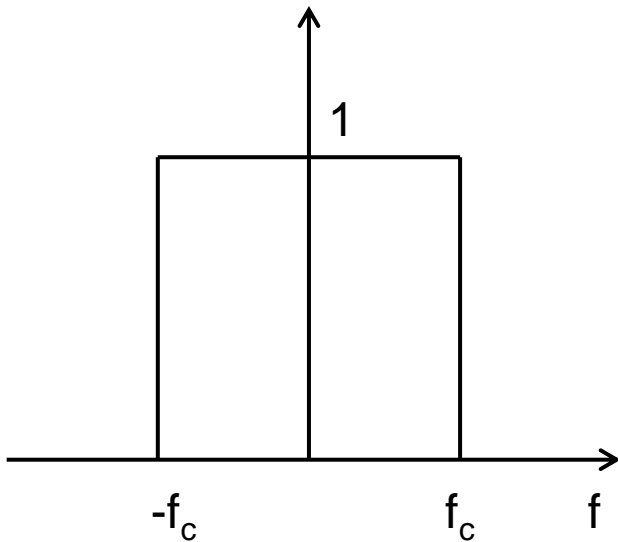


Exemple du module de la réponse fréquentielle d'un filtre **passé-bande**.
Fréquence de coupure à 8 et 11kHz.

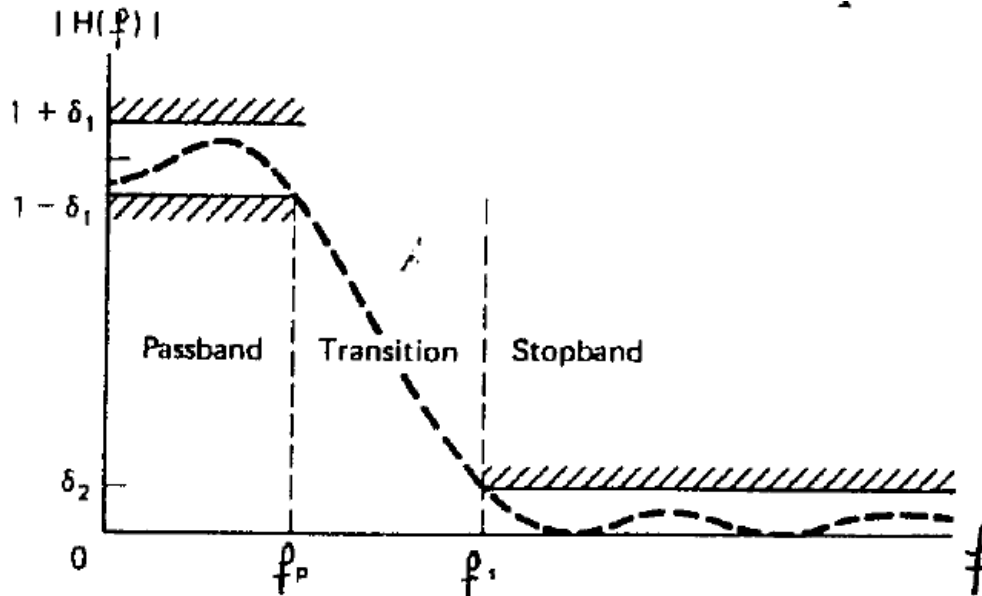
- **Domaine temporel ou domaine fréquentiel ?**
L'utilisation des filtres se fait plutôt dans le domaine temporel (convolution)
La synthèse se fait plutôt dans le domaine fréquentiel (gabarit du filtre)
- **Filtre passe-bas idéal :**

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$h(t) = TF^{-1}\{H(f)\} = 2f_c \text{sinc}(2f_c t)$$



➤ Tolérances sur le gabarit d'un filtre passe-bas non idéal



Caractéristiques de la réponse en fréquence du filtre réalisable :

- Ondulation dans la bande passante
- Ondulation dans la bande atténuée
- Limite de bande passante
- Limite de bande atténuée
- Bande de transition

Causalité, phase :

La réponse d'un filtre idéal est infinie et donc non causale.

Pour rendre le filtre réalisable, on peut choisir de le rendre causal : implantation en temps réel.

Si on choisit un filtre réalisable non causal, il est nécessaire de contrôler sa phase (en fonction de la fréquence)

En choisissant une phase linéaire, toutes les composantes fréquentielles sont retardées de manière identique

Filtres analogiques réalisables en pratique

- **Pour synthétiser des filtres analogiques répondant à un gabarit on choisira parmi un ensemble de filtres connus pour leurs propriétés en terme de pente d'atténuation et d'ondulation dans la bande passante et atténuée.**

- **Exemples :**

Filtres de Butterworth :

Coupe peu raide mais courbe d'affaiblissement régulière

Filtres de Tchebychev :

Raideur de coupe importante mais ondulations dans la bande passante ou atténuée
Filtre simple à mettre en œuvre

Filtres de Cauer :

Coupe extrêmement raide mais ondulations dans la bande passante et atténuée
Circuits plus complexes à réaliser

- Objectifs du filtrage numérique
 - Elaborer un système linéaire et invariant en temps possédant le réponse fréquentielle souhaitée et se prêtant à une réalisation efficace sur calculateur (DSP par exemple)

- Contrainte
 - on ne peut obtenir qu'une réponse fréquentielle approchée
 - Il faut que le système soit stable et causal (si nécessaire)
 - le filtrage doit être réalisé avec un nombre fini d'opérations

- La **transformée en z** est un outil mathématique très utile pour la synthèse des filtres numériques

- Formulation générale du filtrage numérique **linéaire**

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

les a_k et b_k sont les coefficients du filtre.

➤ **Classification des filtres :**

- Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (**RIF**)

$$\text{Forme générale RIF : } y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- Filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (**RII**)

$$\text{Forme générale RII : } y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

➤ **Classification des réalisations:**

- Réalisation transversale ou non récursive
- Réalisation récursive
- Réalisation par TF discrète

➤ Etudes des filtres à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF)

Réponse impulsionnelle entièrement définie par une un **nombre fini d'échantillons**

Principales propriétés des filtres RIF :

- ces filtres sont toujours **stables**
- leur réponse fréquentielle peut présenter une phase **linéaire**
- la durée du régime transitoire est limitée à la durée de la réponse impulsionnelle
- pas de propagation des erreurs de calcul (programmation non récursive)
- faiblesse : pour améliorer les performances du filtre on peut être amené à augmenter le nombre d'échantillons

3 principales méthodes de synthèse de filtres RIF :

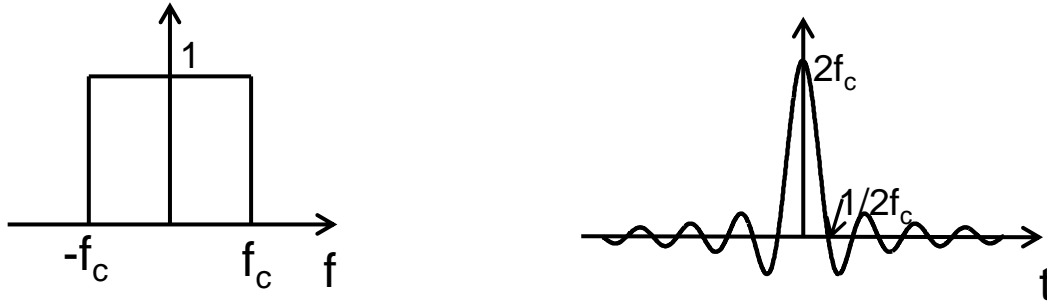
Méthode des fenêtres

Méthode de l'échantillonnage en fréquence

Méthode de synthèse de filtre optimal (REMEZ)

➤ Synthèse d'un filtre RIF par la **méthode des fenêtres**

On part du filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure f_c



Filtre numérique : échantillonnage de la réponse impulsionnelle

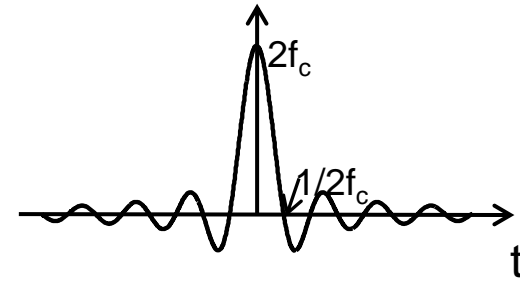
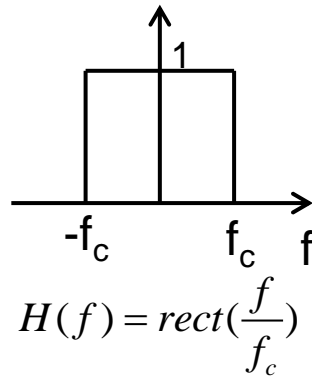
Durée finie de la réponse impulsionnelle : nombre fini d'échantillons (L),
multiplication par une fenêtre

Causalité : décalage de $(L-1)/2$ échantillons (si nécessaire)

Mise en œuvre : fonction **FIR1** avec Matlab par exemple

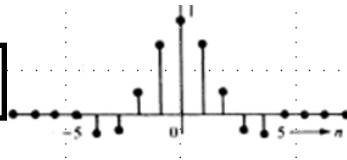
➤ Synthèse d'un filtre RIF par la **méthode des fenêtres**

Réponse du filtre idéal



Echantillonnage de la réponse impulsionnelle

$$h[n] = 2f_c \text{sin c}(2f_c n) \times w[n]$$

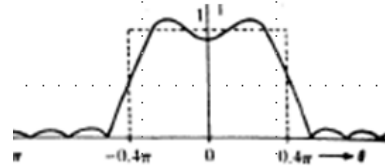


Avec $w[n] = \text{rect}(n/L)$

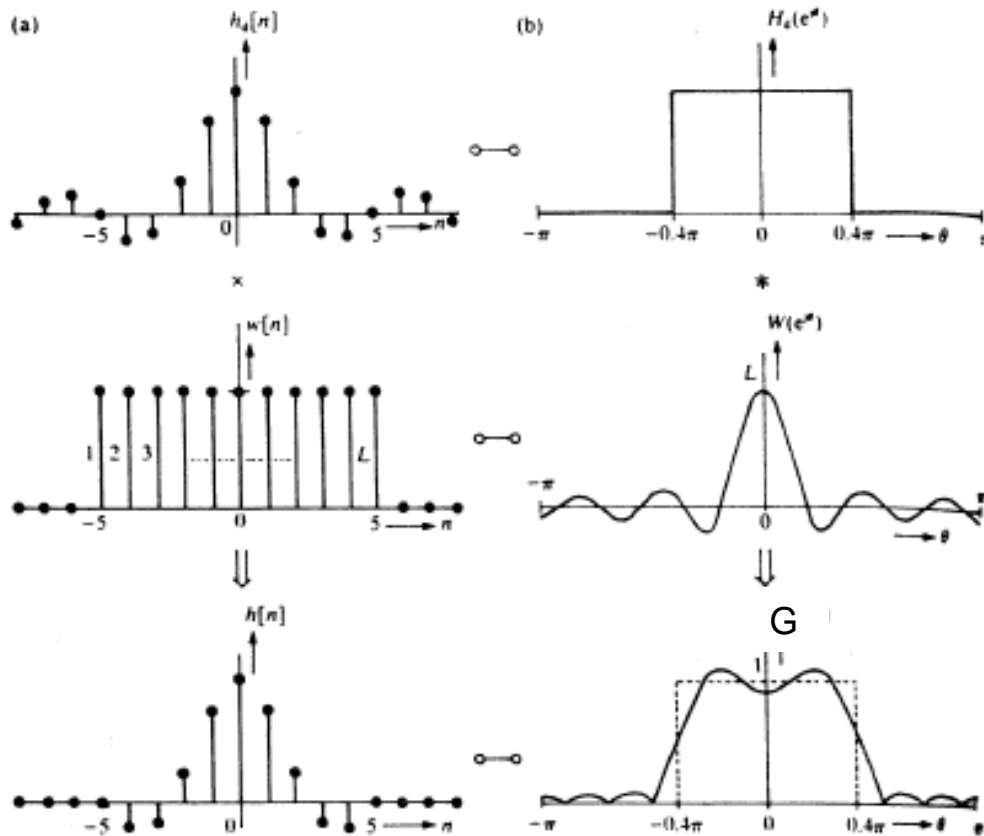
pour limiter la durée à $2L+1$ échantillons

Réponse du filtre numérique réalisable

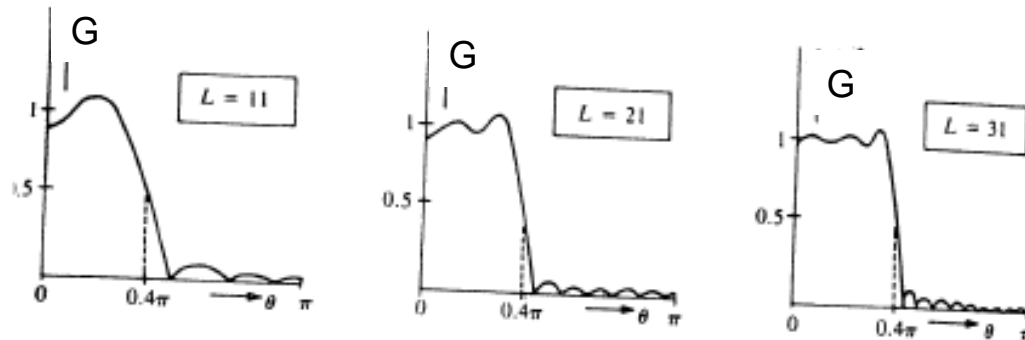
$$G(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{f_c}\right) * \frac{\sin(\pi L f)}{\sin(\pi f)}$$



La phase dépendra du décalage éventuelle pour rendre causal le filtre



Choix du nombre d'échantillons (impair) du filtre : amélioration des performances



➤ Autres méthodes de synthèse

- **Méthode de l'échantillonnage en fréquence**

- *La réponse fréquentielle est échantillonnée ,la réponse impulsionnelle est obtenue par TF inverse*
- *Possibilité de définir des gabarits « personnalisés »*
- *Réalisation avec le fonction Matlab **FIR2***

- **Méthodes optimales**

- *La réponse impulsionnelle est synthétisée avec des méthodes d'optimisation ayant comme critère la minimisation des oscillations et la raideur de la pente de coupure*
- *Réalisation avec le fonction Matlab **REMEZ***

- Utilisation des filtres RIF dans le domaine temporel : **convolution numérique**

Soit le filtrage du signal numérique $x[n]$ par le filtre de réponse impulsionnelle $h[n]$

Soit $e[n]$: $x[0]=10$, $x[1]=7$, $x[2]=5$, $x[3]=12$, $x[4]=3$, et x vaut 0 ailleurs

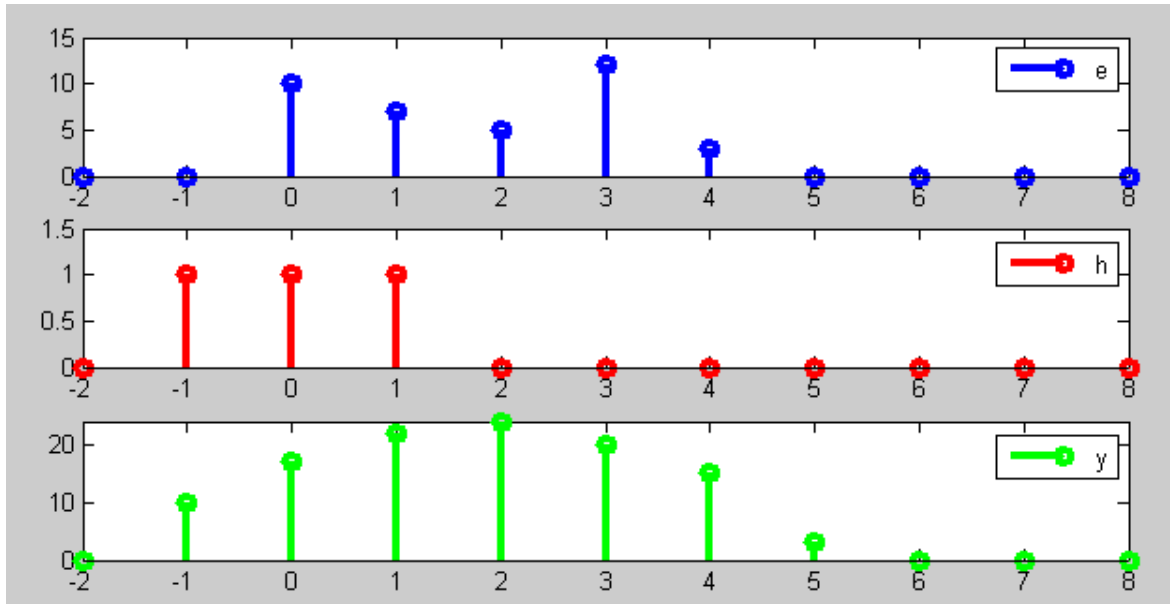
Et $h[n]$: $h[-1]=1/3$, $h[0]=1/3$, $h[1]=1/3$, et h vaut 0 ailleurs (filtre non causal)

Soit y le signal résultant du filtrage de x par h . y est obtenu par la convolution de x par h

Calcul de $y[n]$

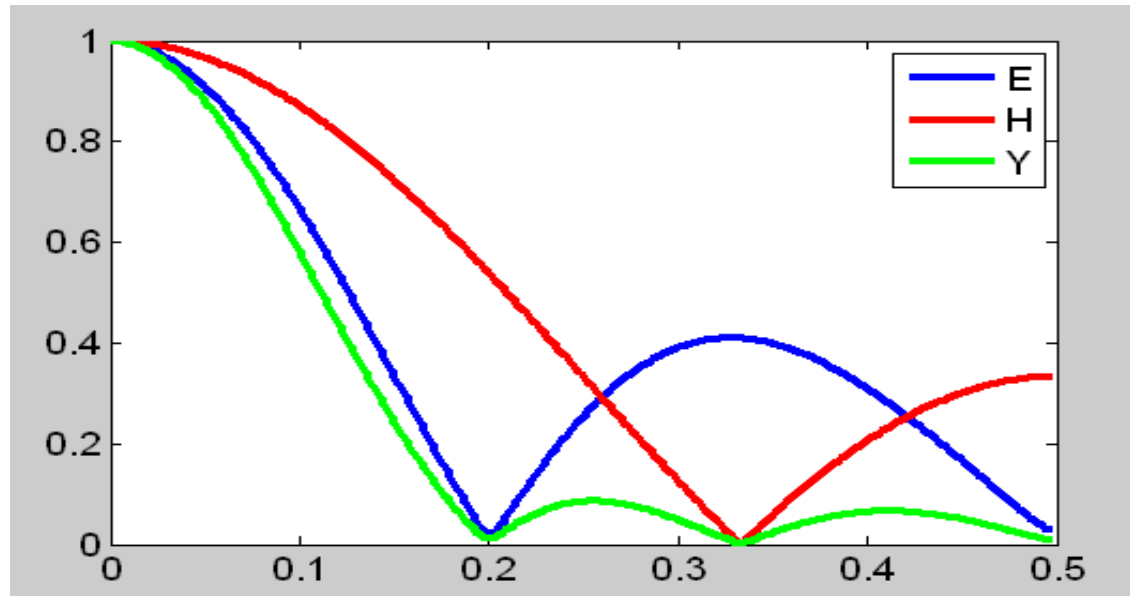
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k]$$

➤ Résultat du filtrage de x par h pour notre cas : $y[n] = \sum_{k=0}^4 x[k] \cdot h[n-k]$ pour n de -1 à 5



y : 1/3(10 17 22 24 20 15 3)

➤ Analyse fréquentielle :



➤ Moyeneur : filtre numérique simple, moyenne glissante sur M points

➤ Relation entrée-sortie (filtre causal)

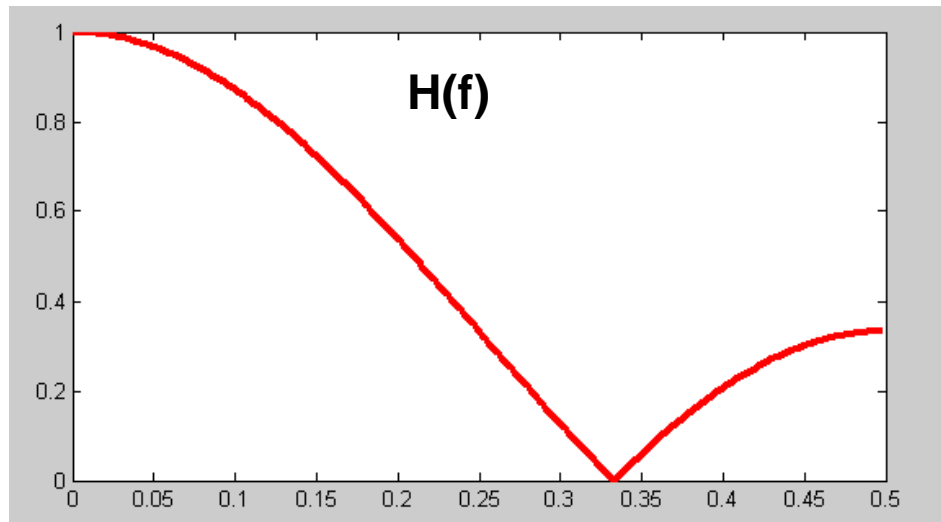
$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

➤ Cas du moyeneur temporel sur 3 points :

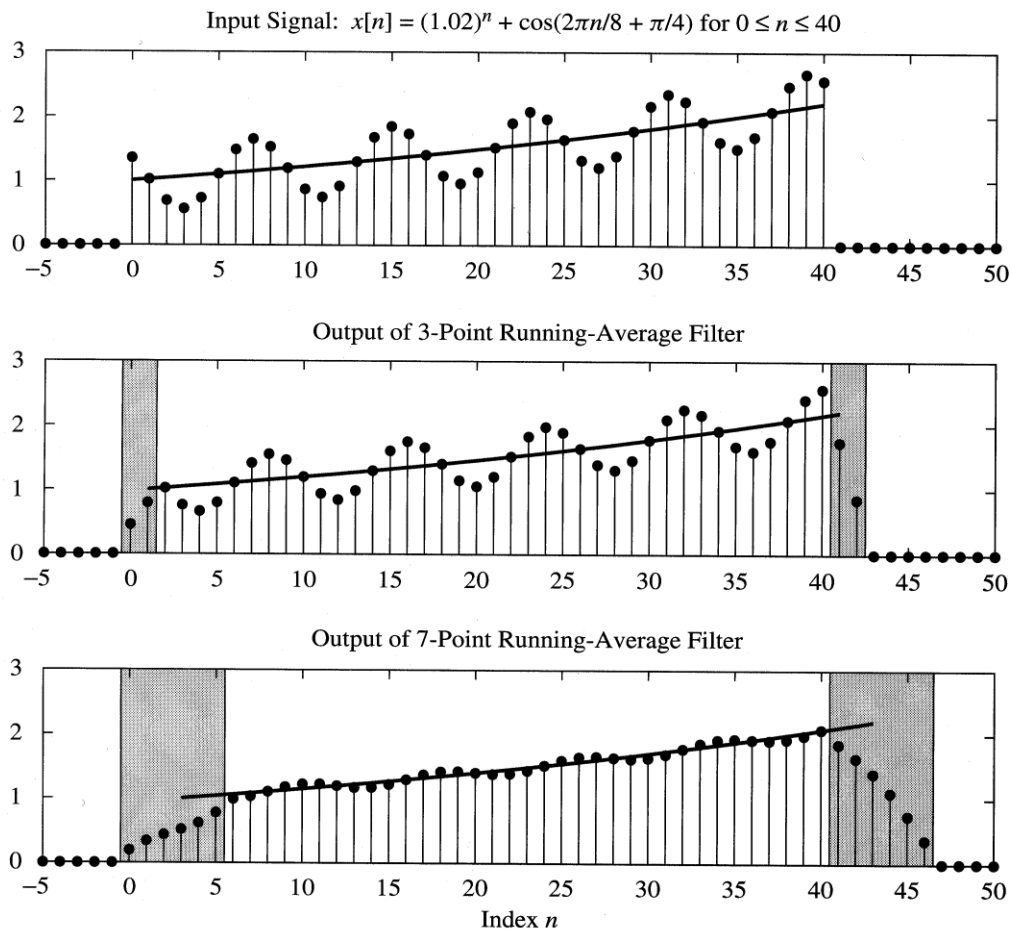
Réponse impulsionnelle correspondante : $h[n] = 1/3$ pour n de 0 à 2, $h[n] = 0$ ailleurs

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$

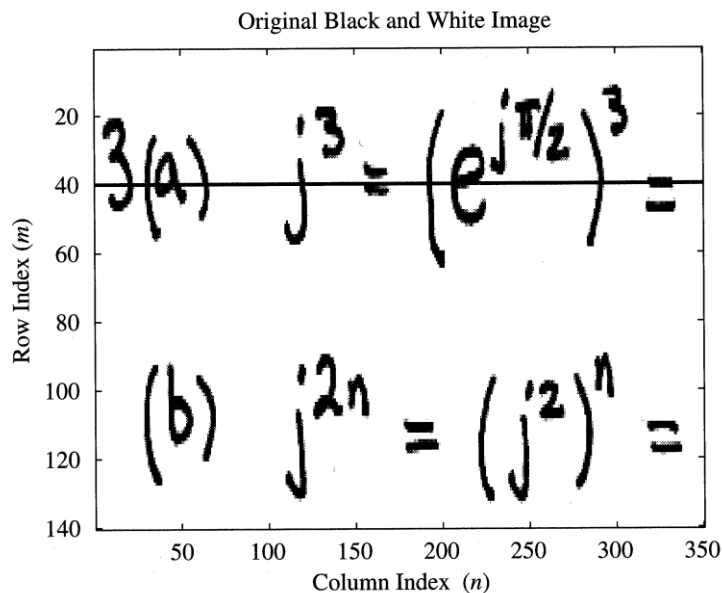
➤ Réponse fréquentielle, TF de la réponse impulsionnelle : $H(f) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos 2\pi f)$



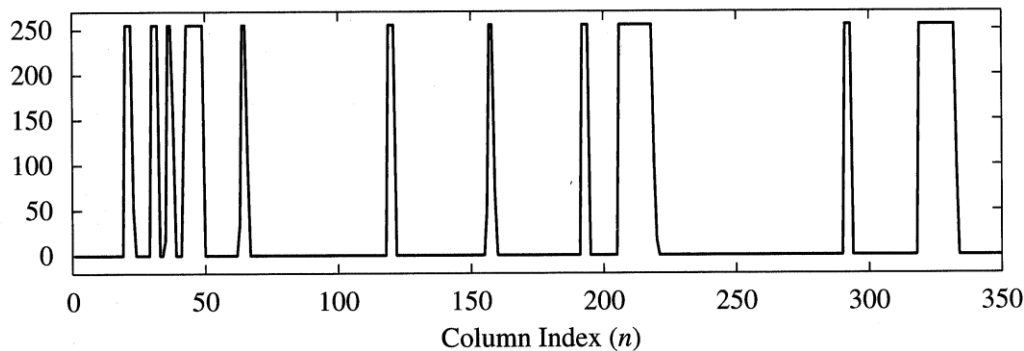
- Filtrage du signal constitué de la somme d'une « rampe continue » et d'un signal sinusoïdal à la fréquence 1/8
- Comparaison du signal filtré avec un moyenneur sur 3 points et un moyenneur sur 7 points



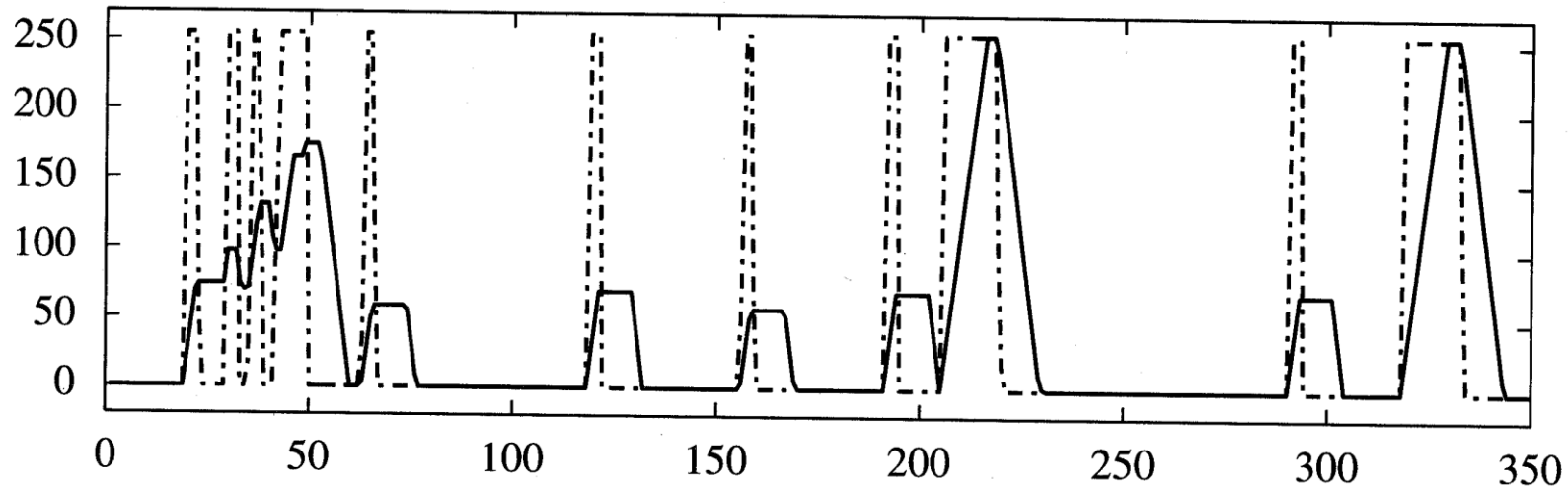
- Exemple du filtrage d'une image.
- Le filtre sera appliqué successivement sur chaque ligne de l'image



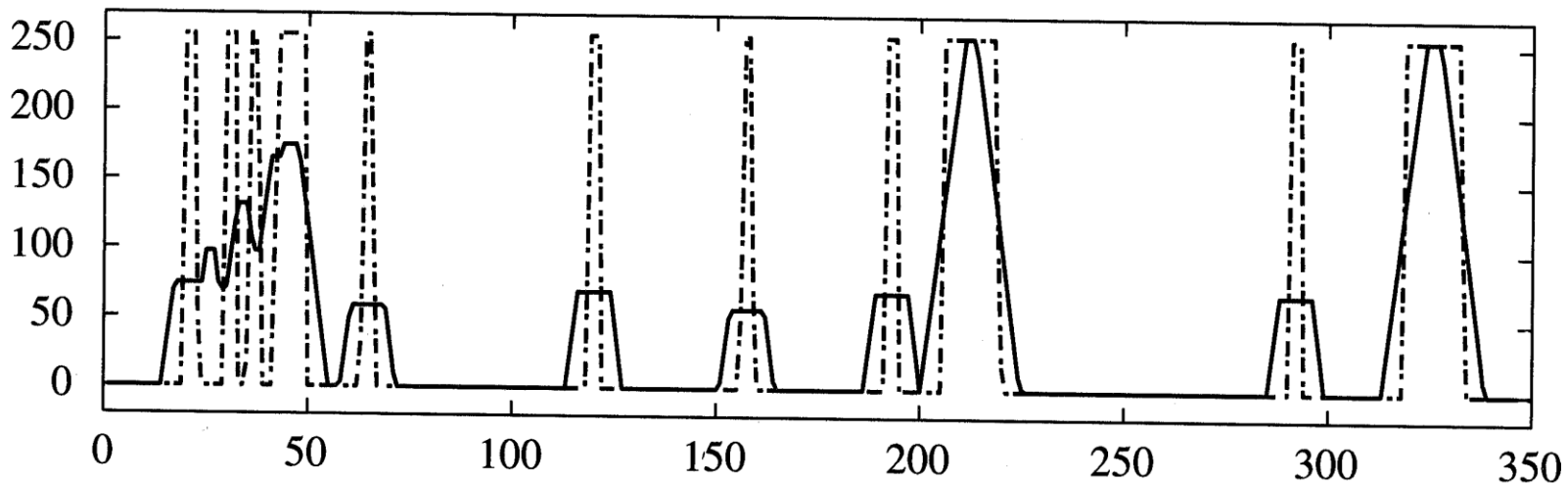
- Exemple de la ligne n° 40. C'est un signal



- Exemple du filtrage de la ligne n° 40 par un filtre moyenneur **causal** sur 11 points

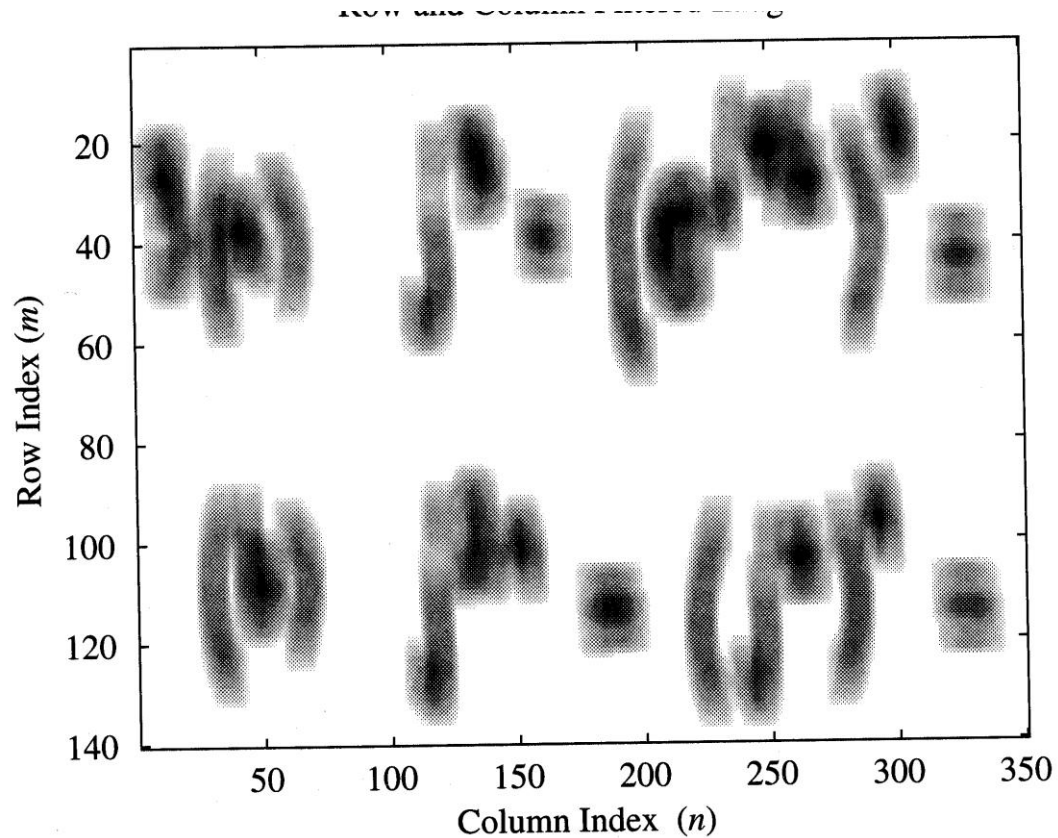


- Exemple du filtrage de la ligne n° 40 par un filtre moyenneur **non causal** sur 11 points



Noter le décalage spatial et l'amplitude du résultat

- Résultat sur l'image complète du filtrage par un **filtre moyenneur non causal sur 11 points**
- Le filtre a été appliqué d'abord sur les lignes puis sur les colonnes
 - L'amplitude du résultat a été recalculée pour occuper toute l'échelle des niveaux de gris



- Comment éliminer une composante sinusoïdale de fréquence 1/11 superposée à l'image
 - On applique un filtre moyeneur de 11 points sur les lignes

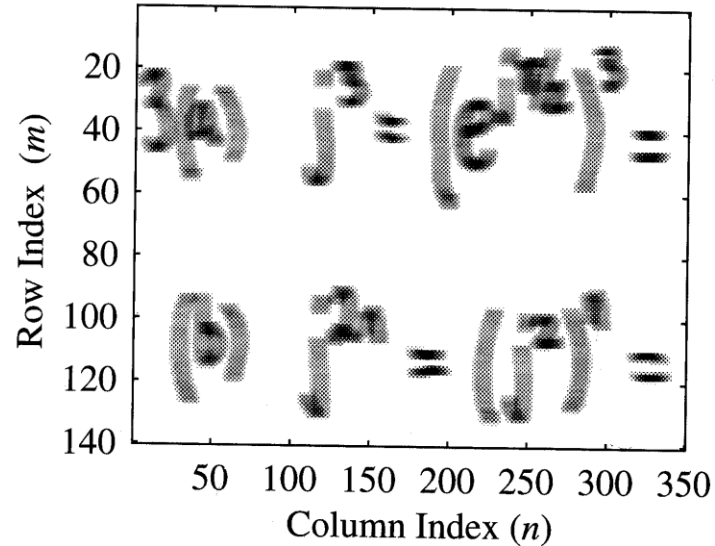
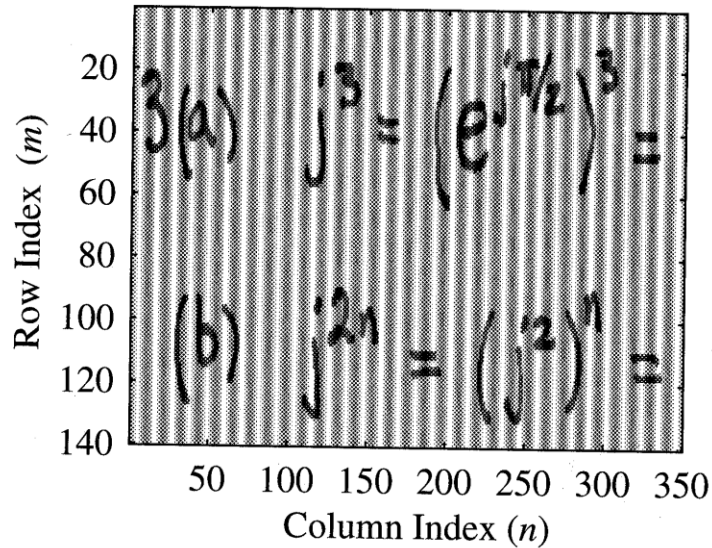
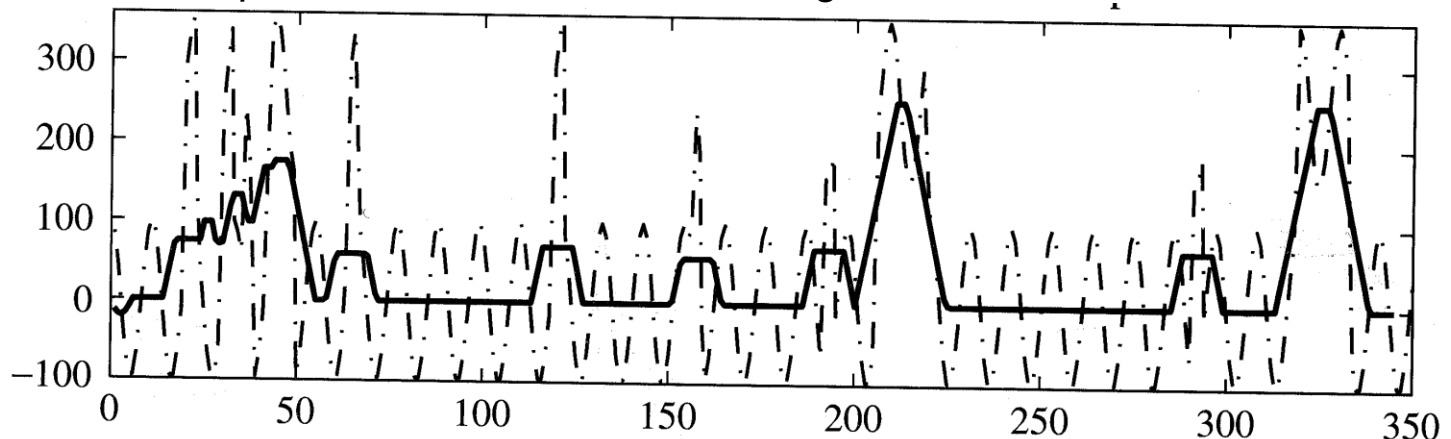


Image avant et après filtrage.

Noter la suppression de la composante sinus mais aussi l'élargissement des motifs

Détail d'une ligne



➤ **Etudes des filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII)**

Forme générale :

$$y[n] = \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

Le problème est de trouver les coefficients du filtre a_k et b_k pour que le filtre soit causal et stable et respecte au plus près le gabarit fréquentiel.

Spécificités des filtres RII

- peuvent être obtenus par transposition d'un **filtre continu**
- peuvent être obtenus avec un **petit nombre** de coefficients
- mise en œuvre **récursive**
- peuvent être **instables**
- la réponse fréquentielle peut présenter une phase **non linéaire**
- une bonne précision de calcul est nécessaire pour éviter la propagation des erreurs

Principales méthodes de synthèse de filtre IIR:

Transposition du filtre analogique en filtre numérique

Méthode de l'invariance impulsionnelle

Equivalence à la dérivation

Equivalence à l'intégration : **transformation bilinéaire**

Exemple du filtre RII défini par son équation entrée-sortie : $y[n] = 0.8y[n-1] + 5x[n]$

Calcul de la réponse impulsionnelle :

calcul de la sortie lorsque l'entrée est un dirac $\delta[n]$

on suppose que l'entrée est nulle avant l'instant de départ

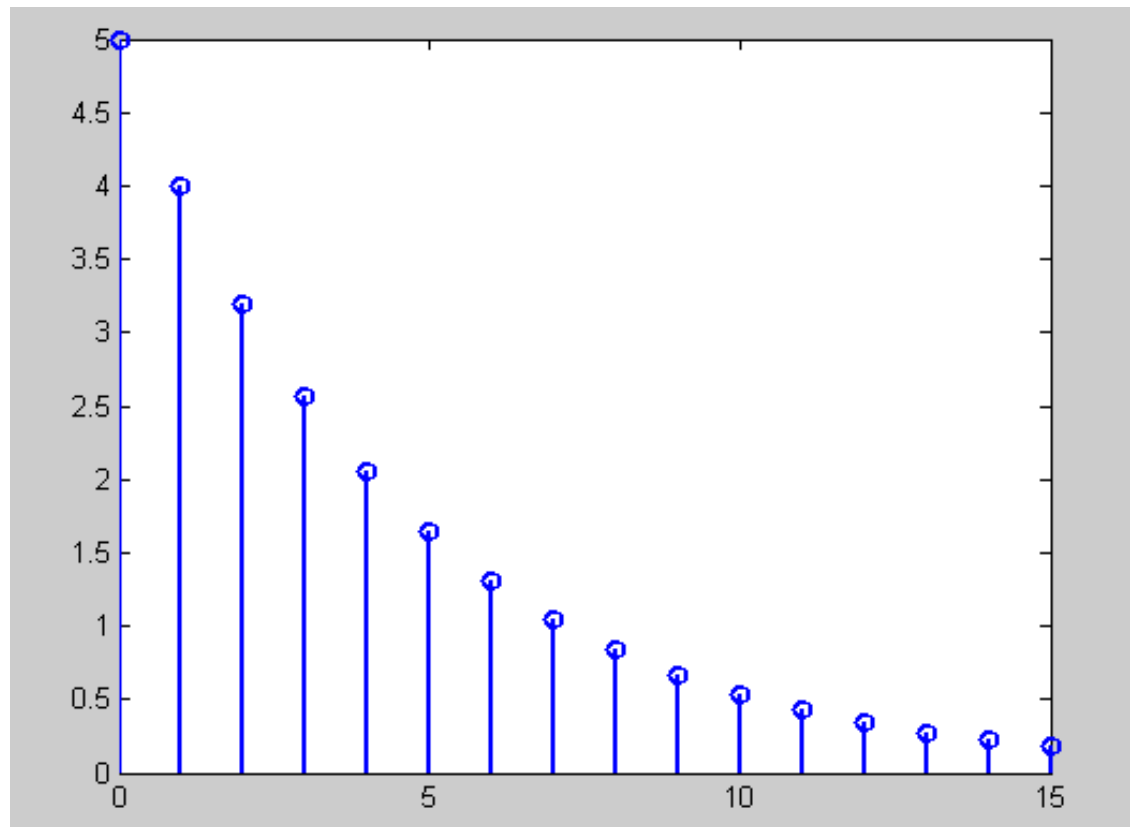
on suppose que la sortie est nulle avant l'instant de départ

Résultat du calcul :

$$h[n] = 5 \cdot (0.8)^n \cdot u[n]$$

Avec $u[n]$, l'échelon unité

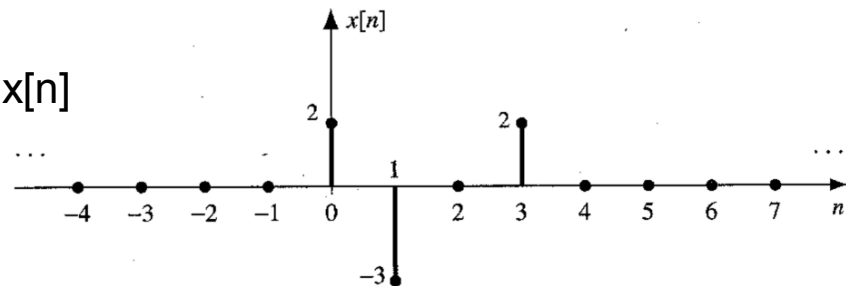
La transformée en Z est très utile pour ce calcul dans le cas général



Exemple du filtre RII défini par son équation entrée-sortie : $y[n] = 0.8y[n-1] + 5x[n]$

Calcul de la réponse du filtre pour le signal d'entrée $x[n]$

$$x[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + 2\delta[n-3]$$



$$y[0] = 0.8y[-1] + 5x[0] = 0.8(0) + 5(2) = 10$$

$$y[1] = 0.8y[0] + 5x[1] = 0.8(10) + 5(-3) = -7$$

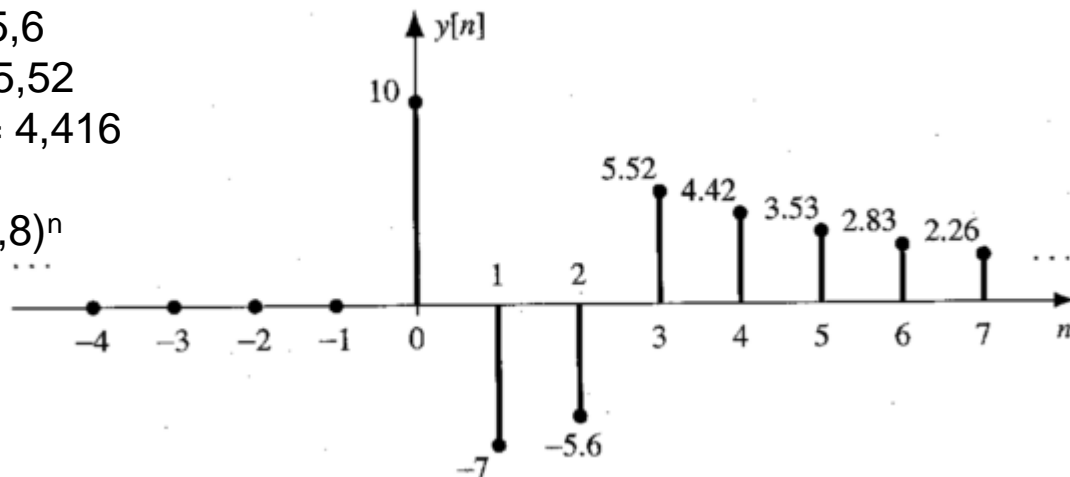
$$y[2] = 0.8y[1] + 5x[2] = 0.8(-7) + 5(0) = -5.6$$

$$y[3] = 0.8y[2] + 5x[3] = 0.8(-5.6) + 5(2) = 5.52$$

$$y[4] = 0.8y[3] + 5x[4] = 0.8(5.52) + 5(0) = 4.416$$

.....

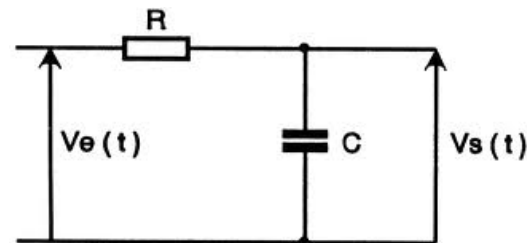
Ensuite la sortie est proportionnelle à $(0.8)^n$



Noter la possible propagation des erreurs de calcul

Noter le petit nombre de coefficients pour définir le filtre (2)

Filtre numérique équivalent au filtre RC analogique passe bas :



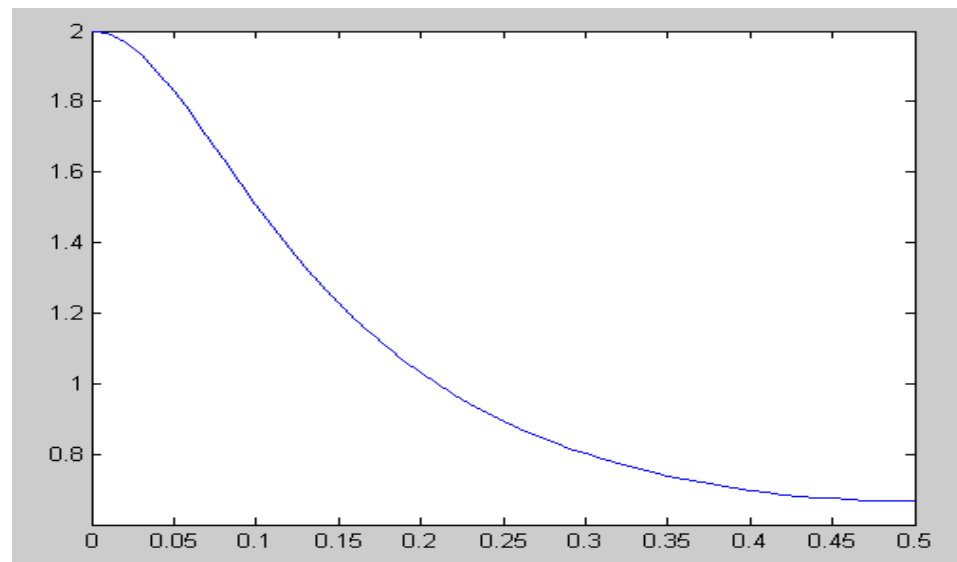
Relation entrée-sortie de ce filtre linéaire caractérisé par l'équation aux différences suivante : $y[n] - ay[n-1] = x[n]$ avec $|a| < 1$

On déduit la réponse impulsionnelle par calcul de la réponse à $\delta[n]$ ou avec la transformée en Z

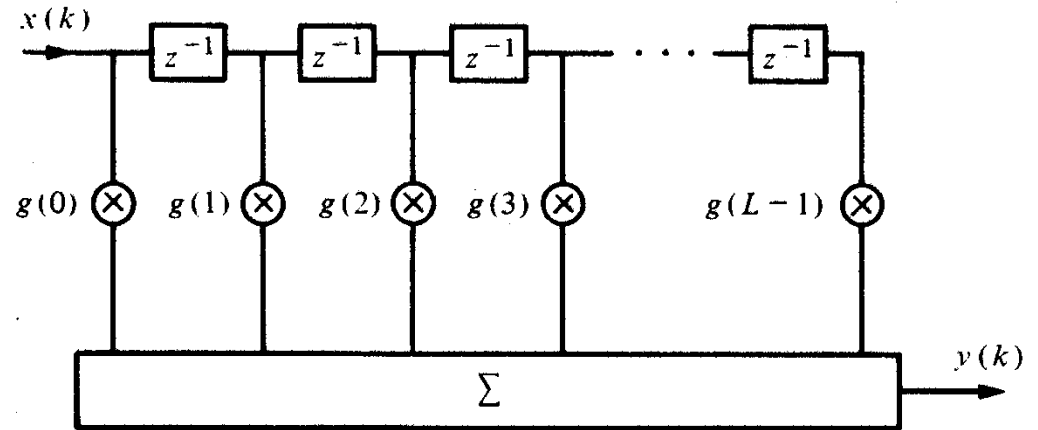
$$h[n] = a^n u[n] \quad \text{avec} \quad u[n] \text{ l'échelon unité}$$

Calcul de la réponse fréquentielle TFtd ou propriétés de la TZ

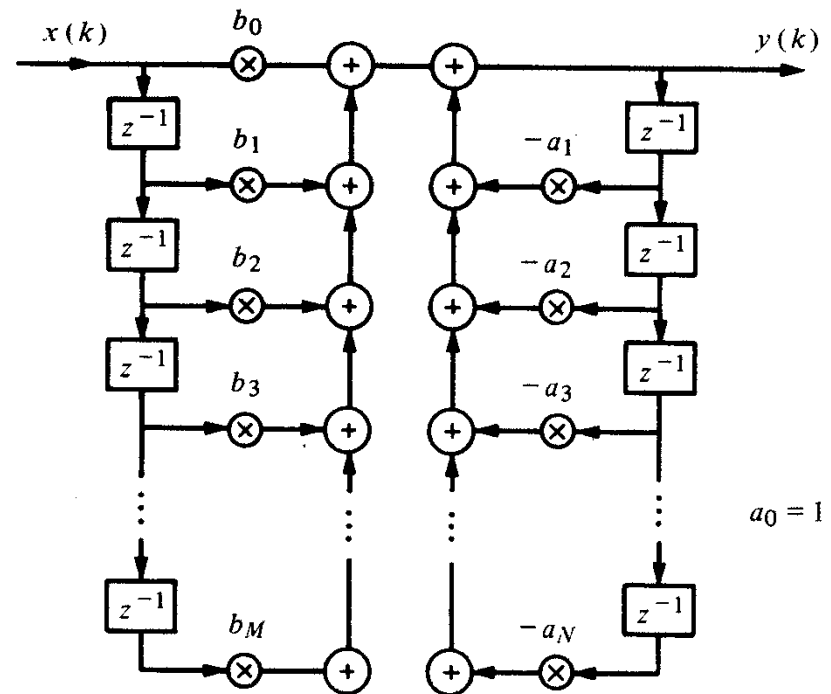
$$H(f) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}}$$



Structure non récursive
Adaptée aux filtres RIF



Structure récursive
Adaptée aux filtres RII et à
d'autres filtres pouvant être
formulés de manière récursive



Les fenêtres de pondération

Pour traiter ou analyser un signal, on est amené à limiter sa durée.

La transformée de Fourier du signal 'tronqué' n'est alors qu'une approximation de la transformée de Fourier du signal de départ.

Il est important de faire un choix raisonné de la fenêtre de pondération $w(t)$ qui est utilisée pour limiter la durée du signal.

➤ **Modélisation**

Dans le domaine temporel : $x_w(t) = x(t) w(t)$

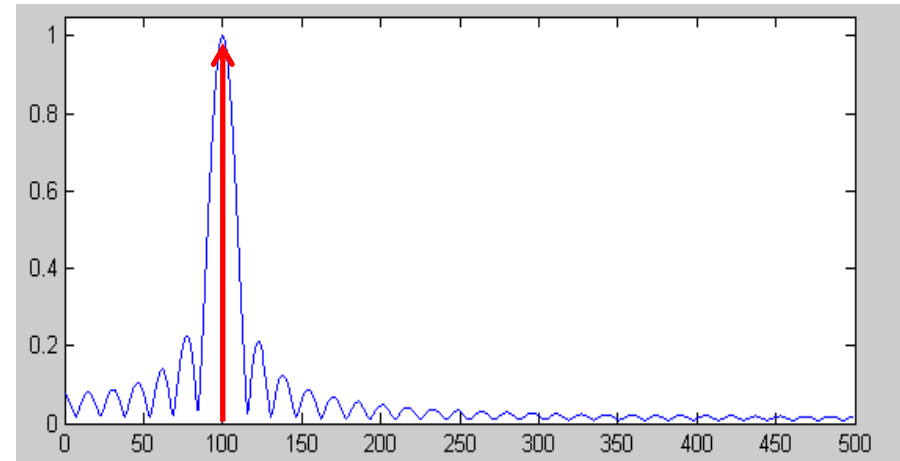
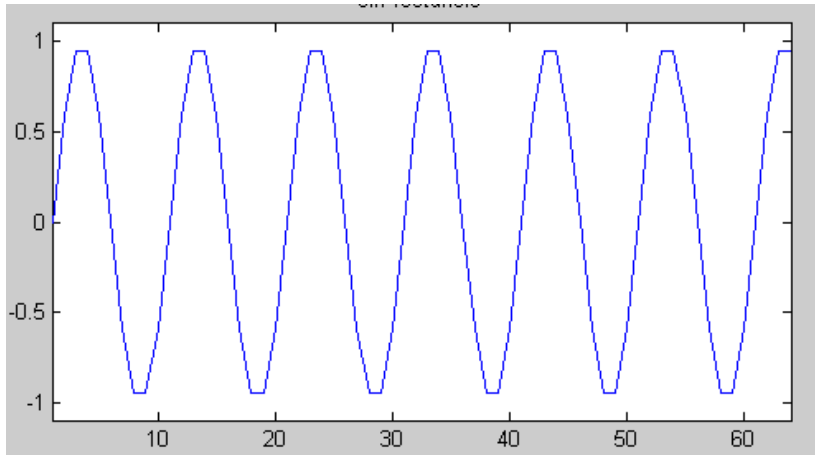
Deviens dans le domaine fréquentiel : $X_w(f) = X(f) * W(f)$

La fenêtre qu'on utilise intuitivement est la fenêtre rectangulaire qui permet simplement de garder les échantillons du signal sur une durée fixée sans modifier leur amplitude. Le spectre du signal tronqué est donc convolué (en fréquence) par la TF du rectangle c'est à dire un sinus cardinal

- Analyse d'un signal sinus de fréquence 100Hz, échantillonné à 1000Hz et limité à L=64 échantillons

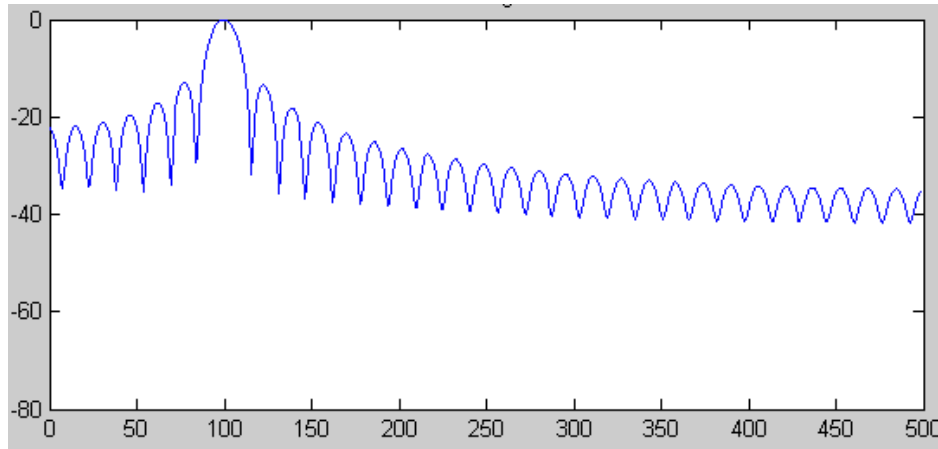
$$x[n] = \exp(j2\pi f_0 n) \cdot \text{rect}(n / L)$$

$$X(f) = \delta(f - f_0) * \frac{\sin(\pi L f)}{\sin(\pi f)}$$



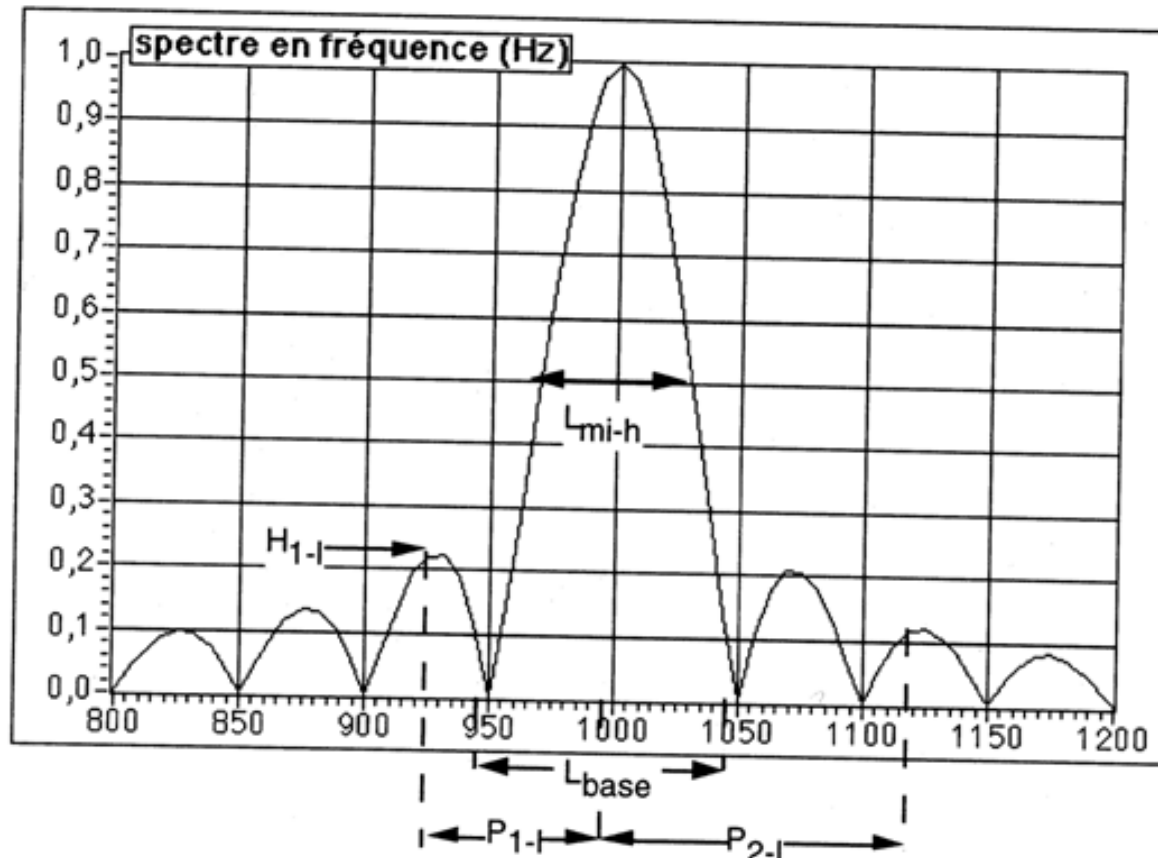
Élargissement du pic théorique à cause de la convolution par le sinus cardinal

En échelle log ::



Paramètres fréquentiels caractéristiques des fenêtres de pondération:

- Largeur du lobe principal \rightarrow *résolution fréquentiel*
- Amplitude du 1er lobe secondaire \rightarrow *résolution dynamique*
- Pente de décroissance des lobes secondaires \rightarrow *résolution dynamique*



Diverses fenêtres ont été inventées dans le but de limiter les oscillations dans les lobes secondaires et réduire la largeur du lobe principal

Fenêtres de Hamming généralisées:

$$w_{H\alpha}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \left[\alpha + (1 - \alpha) \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right]$$

$$W_{H\alpha}(f) = T\alpha \text{sinc}(Tf) + \frac{T(1 - \alpha)}{2} [\text{sinc}(Tf + 1) + \text{sinc}(Tf - 1)]$$

Avec $\alpha=1$ fenêtre rectangulaire
 $\alpha=0,54$ fenêtre de Hamming
 $\alpha=0,5$ fenêtre de hanning

Fenêtres triangulaire ou Bartlett

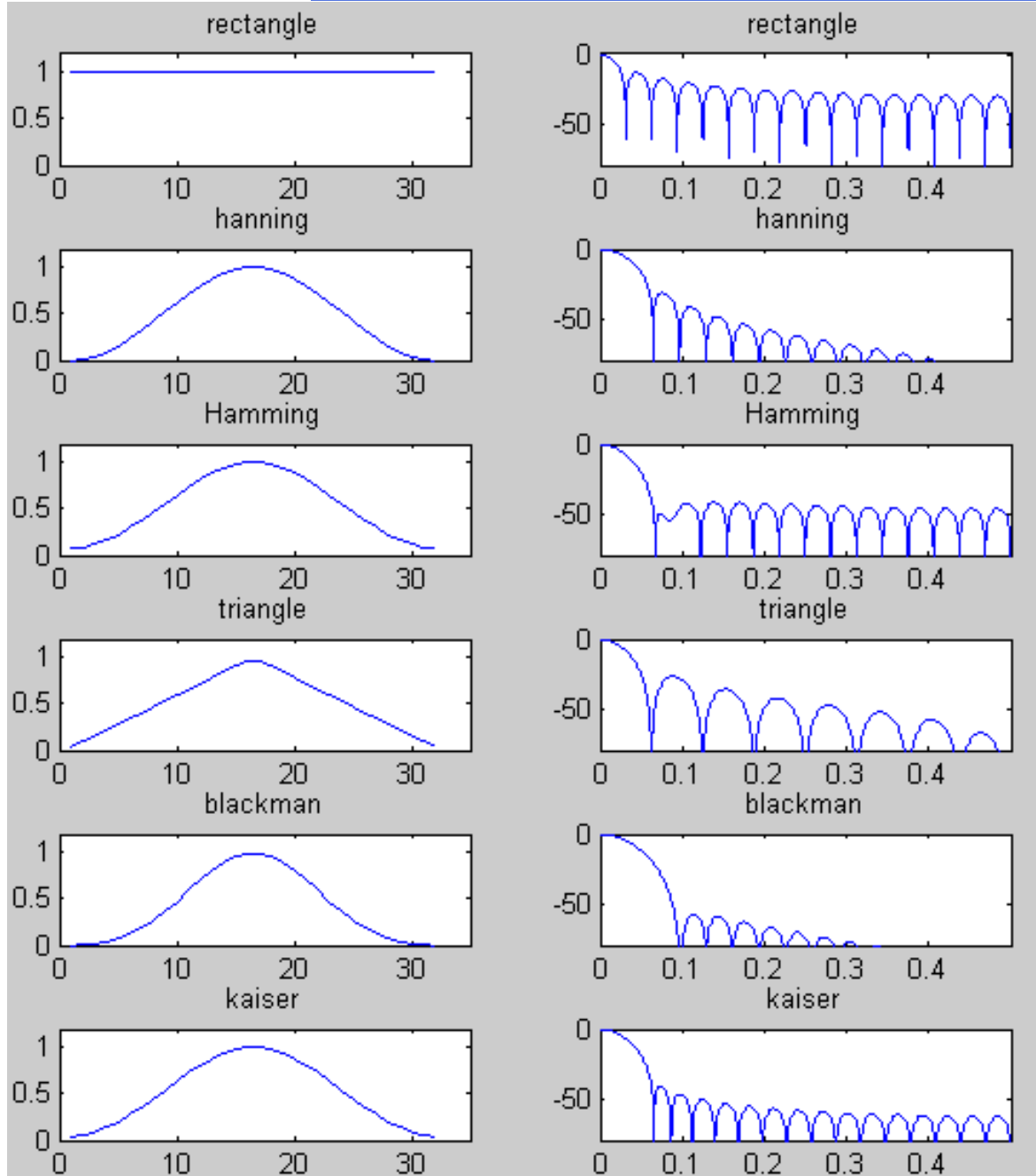
Fenêtre parabolique

Fenêtre cosinusoidale

Fenêtre de Blackmann

Fenêtre de Kaiser

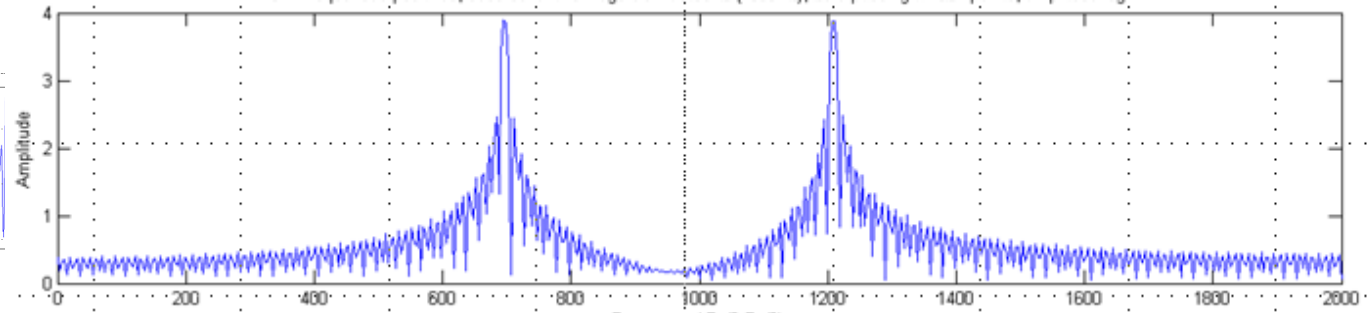
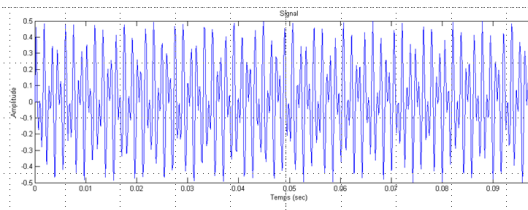
Comparaison des fenêtres de pondération



Comparaison des différentes fenêtres de pondération dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel

Analyse d'un signal constitué de la somme de 2 sinus échantillonnés à 4000Hz sur 200 points

Rectangle



Hamming

