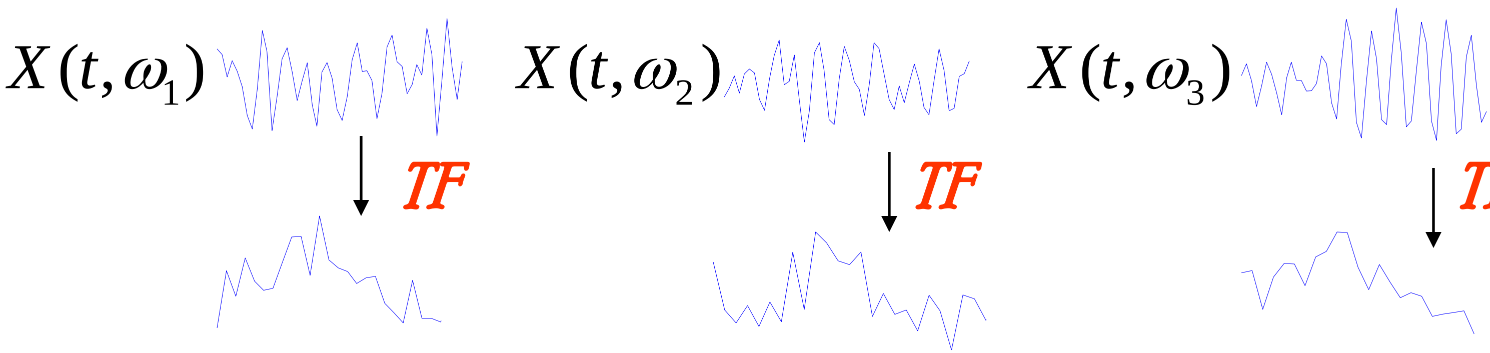
Analyse Spectrale des Signaux Aléatoires

1. Motivation
2. Aspects théoriques
3. Estimation: périodogramme lissé, moyenné

Master MEGA
Jérôme Antoni LVA,INSA-Lyon

Motivation

- L'analyse de Fourier des signaux aléatoires est-elle possible?
- La TF d'un signal aléatoire est une fonction aléatoire.



- Il faut donc décrire la structure fréquentielle d'un signal d'un point de vue statistique.
- Un descripteur statistique très utilisé est la densité spectrale de puissance moyenne (DSP)

TF d'un signal aléatoire?

- La décomposition de Fourier d'un signal aléatoire stationnaire s'écrit formellement:

$$\boxed{X(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} \underbrace{dX(f,\omega)}}$$

processus « incrémental » qui joue le rôle d'un coefficient de Fourier aléatoire

- Il s'agit de l'équivalent de la TF inverse, mais la TF directe ne s'écrit pas : elle ne converge pas!

Interprétation

- Le processus incrémental $e^{j2\pi ft}dX(f,\omega)$ s'interprète comme le filtrage du signal $X(t,\omega)$ dans une bande de fréquence centrée sur f et de largeur df infiniment étroite.
- La quantité

$$\mathbb{E}\left\{\left|dX(f,\omega)\right|^2\right\}$$

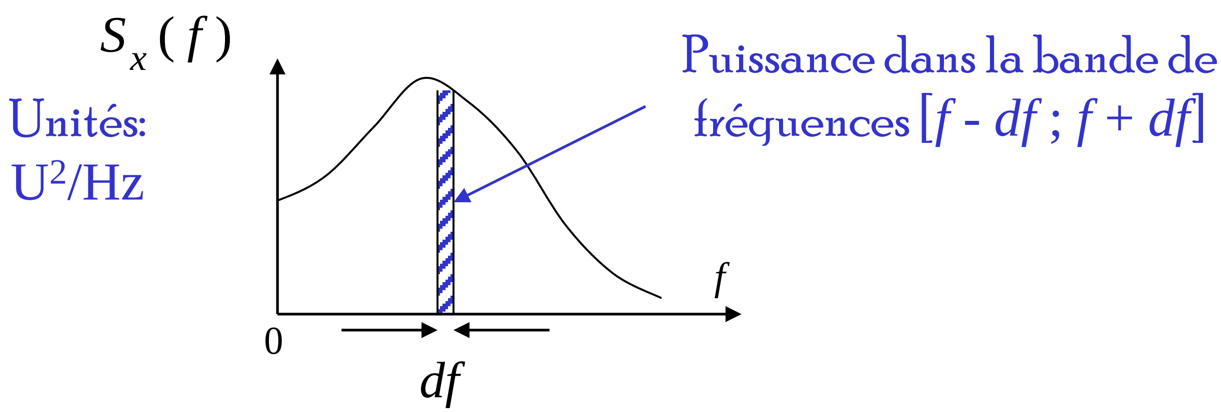
  s'interprète comme la puissance moyenne du signal dans la bande de fréquence centrée sur f et de largeur df.
- C'est essentiellement cette quantité qui est utile en temps que descripteur statistique du signal, car la phase est aléatoire et, en général, de moyenne nulle.

La Densité Spectrale de Puissance

- Définition : la densité spectrale de puissance moyenne (DSP) du signal aléatoire $X(t,\omega)$ est définie telle que

$$\boxed{S_X(f)df = \mathbb{E}\left\{\left|dX(f,\omega)\right|^2\right\}}$$

→ mesure la puissance moyenne du signal en la fréquence *f*

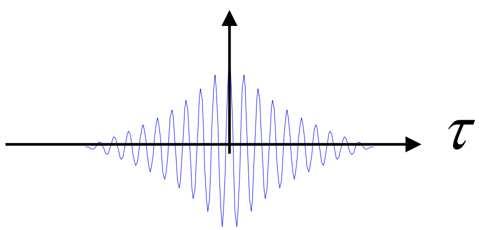


Propriétés fondamentales de la DSP

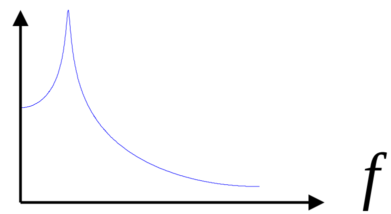
- Théorème de Parseval (conservation de la puissance)

$$\boxed{P_X = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df}$$

- Théorème de Wiener-Khinchine



$$\boxed{R(\tau) \overset{F}{\leftrightarrow} S_X(f)}$$



  - d'où l'on déduit d'ailleurs Parseval en remarquant que $P_X = R_X(0)$
  - d'où l'on déduit que la FAC est une fonction positive définie

Estimation de la DSP

- Problématique: estimer $S_X(f)$ à partir d'une séquence aléatoire $\{X[n]\}$, $n=0,\ldots,N$-1 stationnaire et ergodique

- Deux méthodes principales:

1. Méthode directe: Module carré de la TFD = périodogramme

$$\boxed{\hat{S}_X[k] = I_N[k] \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\left|X[k]\right|^2, \quad k = 0,\ldots,N-1}$$

2. Méthode indirecte: TFD de la FAC estimée

$$\boxed{\hat{S}_X[k] = TFD\left\{\hat{R}_X[\tau]\right\}}$$

- Pris tels quels, ces estimateurs sont très mauvais (non convergents) car ils ne reproduisent pas l'opérateur $\mathbb{E}\{\cdot\}$

"*More lives have been lost looking at the raw periodogram than by any other action involving time series!*"

John Tukey, 1915-2000

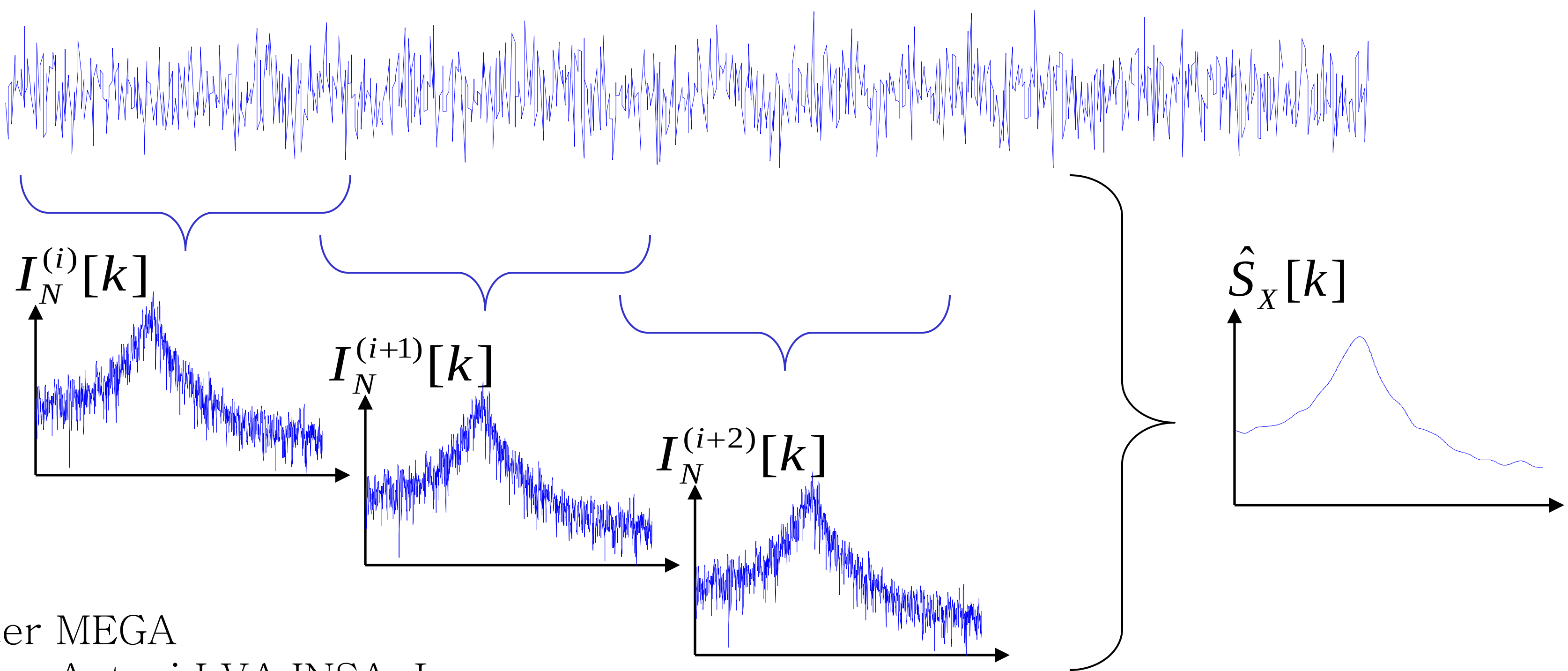
Père de :

- la TFR
- le « bit »
- la démodualtion complexe
- le polyspectre
- le cepstre
- etc…

Périodogramme moyenné

2. Estimation directe par le périodogramme moyenné

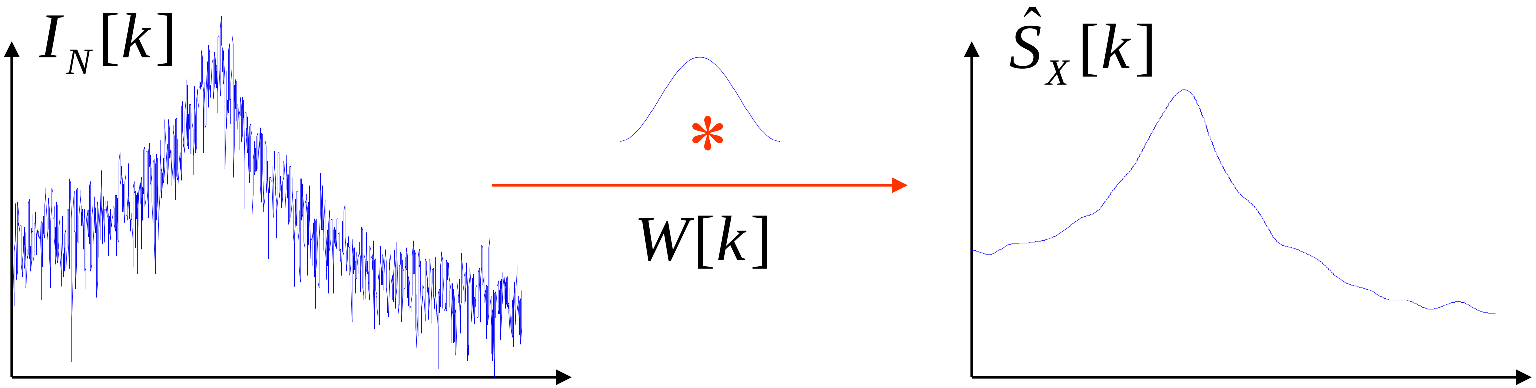
$$\boxed{\hat{S}_X[k] = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} I_N^{(i)}[k], \quad k = 0,\dots,N-1}$$



Périodogramme lissé

1. Estimation directe par le périodogramme lissé

$$\boxed{\hat{S}_X[k] = \left(I_N * W\right)[k], \quad k = 0, \ldots, N-1}$$



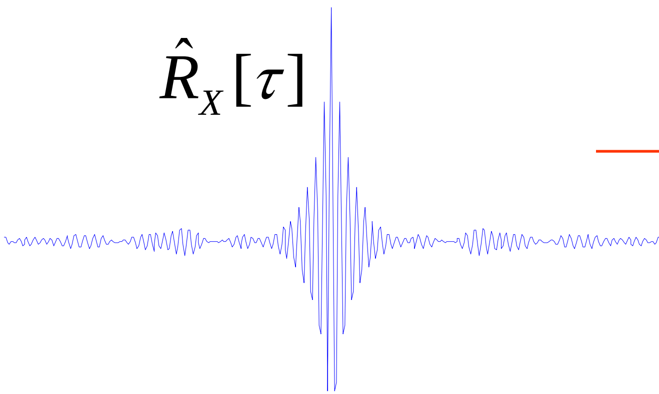
FAC pondérée

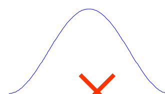
3. Estimation indirecte par la FAC pondérée

$$\boxed{\hat{S}_X[k] = TFD\left\{\hat{R}_X[\tau]\cdot w[\tau]\right\}}$$

fenêtre d'apodisation symétrique, positive. Ex: hanning

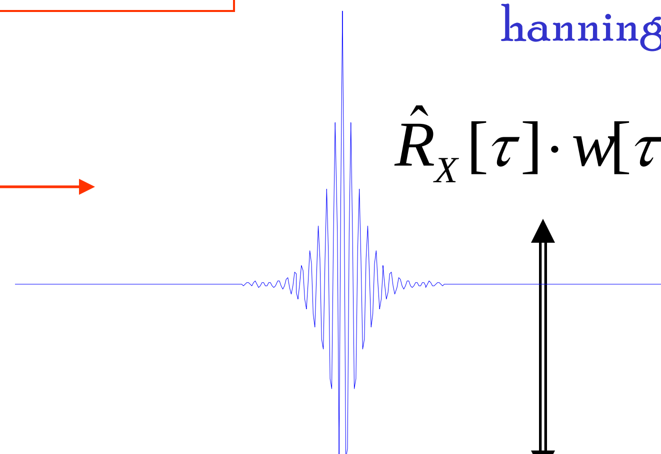
$\hat{R}_X[\tau]$





$w[\tau]$

$\hat{R}_X[\tau]\cdot w[\tau]$



$$\hat{S}_X[k] = \left(I_N * W\right)[k]$$

avec $\begin{cases} \hat{R}_X[\tau] \overset{TFD}{\leftrightarrow} = I_N[k] \\ w[\tau] \overset{TFD}{\leftrightarrow} = W[k] \end{cases}$

Exemple

```
>> y = filter(b,a,randn(1,N));
>> psd(y,Nfft,fe,Nw,Nov);
```

Bruit blanc filtré par un filtre passe-bas $f_c = f_e/4$