



**INSA** | INSTITUT NATIONAL  
DES SCIENCES  
APPLIQUÉES  
LYON

Département Génie Electrique

# Traitement du signal, Filtrages Analogique et Numérique

---

**Thomas Grenier**

**Lab. CREATIS – Univ. of Lyon, France**

**[thomas.grenier@insa-lyon.fr](mailto:thomas.grenier@insa-lyon.fr)**

# Sommaire

---

## I. Généralités

## I. Synthèse de filtres analogiques

## I. **Synthèse de filtres numériques**

A. Généralités sur les filtres numériques et sur le filtrage

B. Structures des filtres numériques

C. Calcul des filtres RII

D. Calcul des filtres RIF

## III- Synthèse de filtres numériques

### A- Généralités sur les filtres numériques et sur le filtrage

1. Forme générale d'un filtre numérique
2. Réponse en fréquence des systèmes discrets
3. Spécification et méthodologie de calcul des filtres (numériques et analogiques)
4. Classification des filtres
5. Comparaison RIF-RII

# A-1 Généralités sur les filtres numériques

## ► Forme générale d'un filtre numérique

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(Q)z^{-Q}}{a(0) + a(1)z^{-1} + \dots + a(P)z^{-P}}$$

- Les coefficients  $a(i)$  et  $b(j)$  sont réels
- Fonction de transfert  $G(z)$  à  $P$  pôles  $p_i$  et  $Q$  zéros  $z_i$  réels ou en paires complexes conjuguées
- Réponse impulsionnelle  $g(k)$

$$G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + \dots + g(Q)z^{-Q}$$

# A-1 Forme générale d'un filtre numérique

- ▶ FILTRE RIF: Si  $P=0$ , le filtre n'a que des zéros

$$G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + \dots + g(Q)z^{-Q}$$

- Les coefficients  $b(k)$  forment la réponse impulsionnelle
- La Réponse Impulsionnelle est de durée Finie : FILTRE RIF
- Filtre à moyenne mobile, ou filtre MA (*Moving Average*).

## A-1 ... Filtre RIF

- ▶ ATTENTION  $G(z)$  a  $Q$  zéros et  $Q$  pôles situés à l'origine  $z=0$
- ▶ ATTENTION la forme de  $G(z)$  peut être trompeuse
  - Exemple: Filtre moyennneur

$$g(k) = \begin{cases} 1/N & k = [0, N-1] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad G(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i}$$

$$G(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{N} \frac{z^N - 1}{z^{N-1} (z - 1)}$$

N zéros et 1 pôle

N zéros, N-1 pôles en  $z=0$ , 1 pôle en  $z=1$

$z=1$  est à la fois pôle et zéro

il reste N-1 zéros et un pôle d'ordre N-1 en  $z=0$

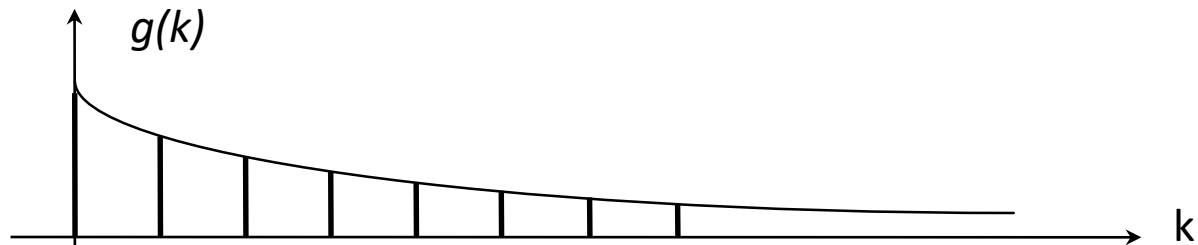
# A-1 Forme générale des filtres numériques

- ▶ FILTRE RII: Si  $G(z)$  a des pôles (différents de  $z=0$ )
  - La Réponse Impulsionnelle est de durée Infinie
  - Un pôle correspond à une réponse impulsionnelle exponentielle

$$G(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i z^{-i}$$
$$g(k) = a^k \text{ pour } k = [0, \infty[$$

Pôle en  $z=a$

Remarque: série convergente pour  $|a|<1$



## A-1 ... Filtres RII

► Si le filtre RII n'a que des pôles (et des zéros en  $z=0$ )

- Filtre AR (Auto-Régressif)

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(0)}{a(0) + a(1)z^{-1} + \dots + a(P)z^{-P}}$$

- Filtre tout-pôles, (*All pole filter*)

► Si le filtre RII a des pôles et des zéros différents de  $z=0$

Modèle ARMA d'ordre P et Q



# A-1 Forme générale des filtres numériques

## ► En règle générale

- possède Q zéros et P pôles et
- un pôle d'ordre Q-P en  $z=0$  si  $Q>P$
- ou un zéro d'ordre P-Q en  $z=0$  si  $P>Q$

### Exemples

1) Voir filtre moyennneur

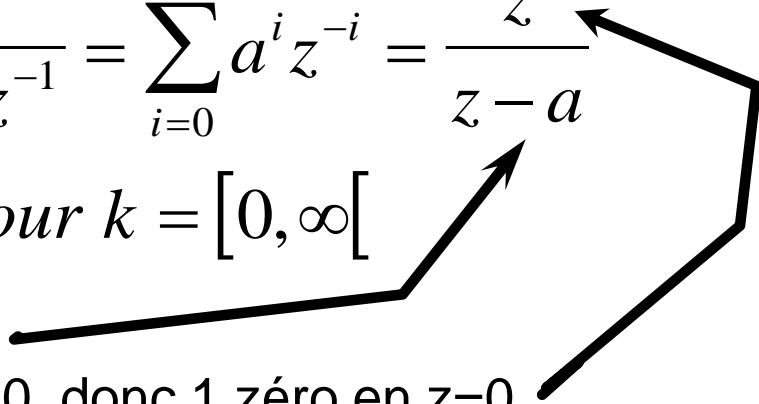
2) Filtre AR d'ordre 1

$$G(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i z^{-i} = \frac{z}{z - a}$$

$$g(k) = a^k \text{ pour } k = [0, \infty[$$

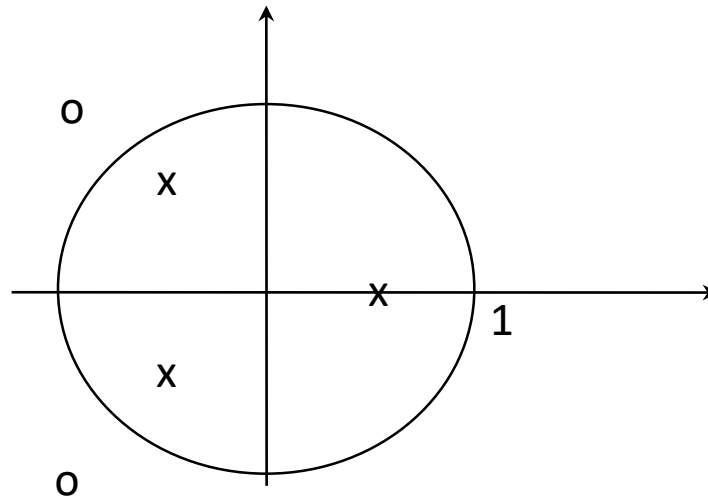
Pôle en  $z=a$

$P=1, Q=0$  donc 1 zéro en  $z=0$



## A-1 Forme générale des filtres numériques

- ▶ Filtre stable si les pôles sont à l'intérieur du cercle unité dans le plan des  $z$



3 pôles  $z = -0.5 + 0.5i$  ,  $-0.5 - 0.5i$  ,  $0.5$

2 zéros  $z = -1 - i$  ,  $-1 + i$

- ▶ Si les zéros sont aussi à l'intérieur du cercle unité, le filtre est dit à phase minimale

## A-2 Réponse en fréquence des filtres numériques

- ▶ Évaluation de  $G(z)$  sur le cercle unité
- ▶ Évaluation de  $G(z)$  pour  $z=\exp(j2\pi f)$   
f variant de 0 à 1
- ▶ Évaluation de  $G(z)$  pour  $z=\exp(j2\pi fT_e)$   
f variant de 0 à  $F_e=1/T_e$ , fréquence d'échantillonnage réelle
- ▶ Transformée de Fourier discrète de la réponse impulsionnelle
- ▶ Représentation en module et en phase
- ▶ Périodique en fréquence (période 1 ou  $F_e$ )
- ▶ Réponse impulsionnelle réelle  
    —————→ Module pair, phase impaire

## A-2 Réponse en fréquence des filtres numériques

### ► Exemple

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k}$$

*rép.impuls.*  $h(k) = a^k, k \geq 0$

$$H(f) = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j2\pi f k}$$

$$H(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j2\pi f k} = \frac{1}{1 - ae^{-j2\pi f}}$$

TFD



$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)}}$$

$$\text{Arg}(H(f)) = \text{ArcTan}\left(\frac{a \sin(2\pi f)}{1 - a \cos(2\pi f)}\right)$$

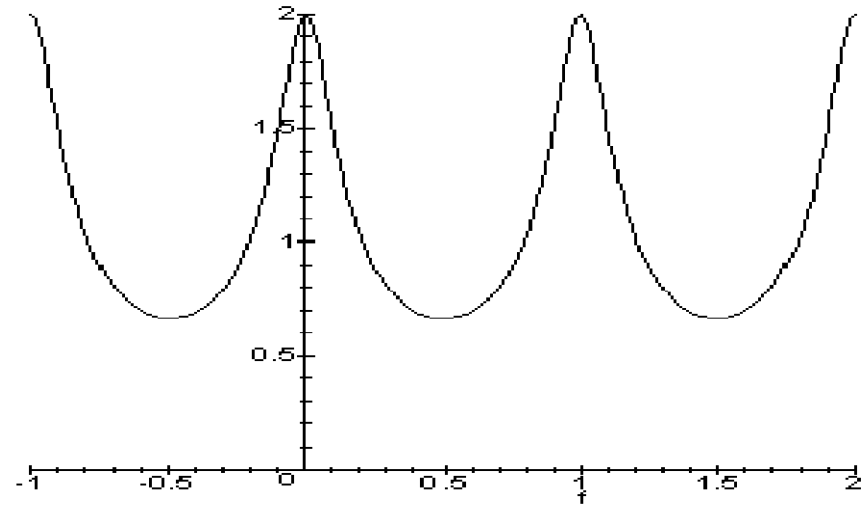
## A-2 Réponse en fréquence des filtres numériques

### ► Exemple (suite)

pour  $a=0,5$

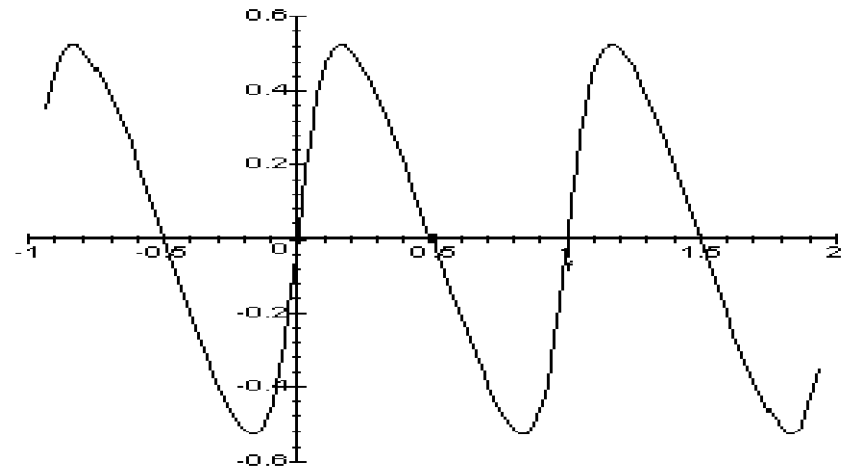
Module  $|H(f)|$

Pair, période 1



Phase

Impaire, période 1



## A-2 Réponse en fréquence des filtres numériques

### ► Exemple

**Filtre de Butterworth passe-bas ordre 2**

**Fréquence de coupure 0,25 (c.à.d 0,25 Fe)**

**MATLAB:**

```
> [b,a]=butter(2,0.5) (2 = Fe)
```

```
b =    0.2929    0.5858    0.2929
```

```
a =    1.0000    0.0000    0.1716
```

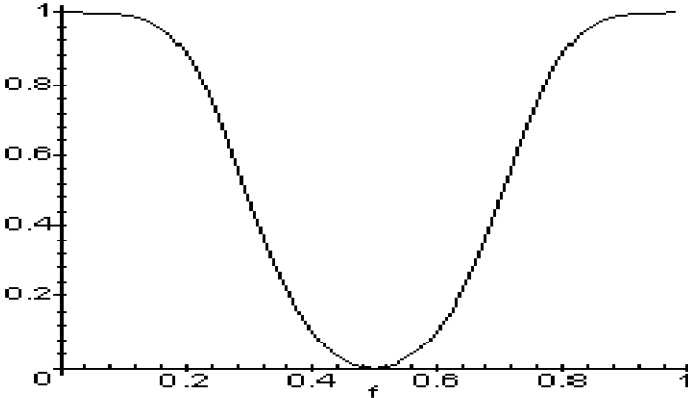
$$H(z) = \frac{0.2929 + 0.5858z^{-1} + 0.2929z^{-2}}{1 + 0.1716z^{-2}}$$

- Pôles et zéros (`> [z,p,k]=butter(2,0.5)`)  
     $z = -1.0000, -1.0000$   
     $p = 0.4142i, -0.4142i$
- Réponse en fréquence  $z = \exp(j2\pi f)$   $f = [0,1]$

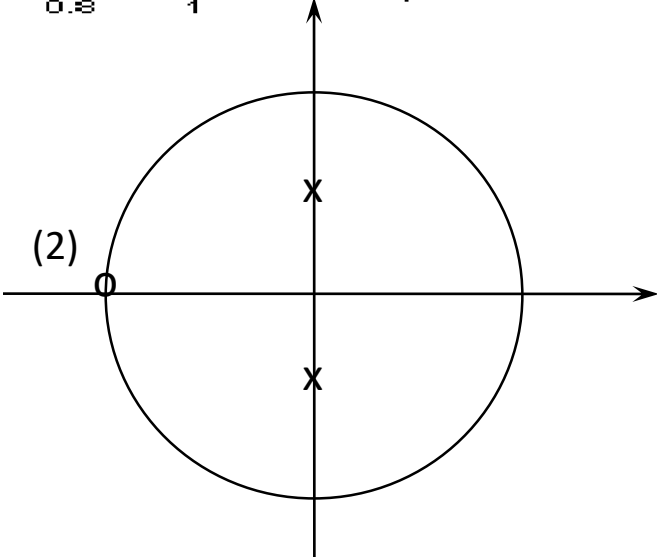
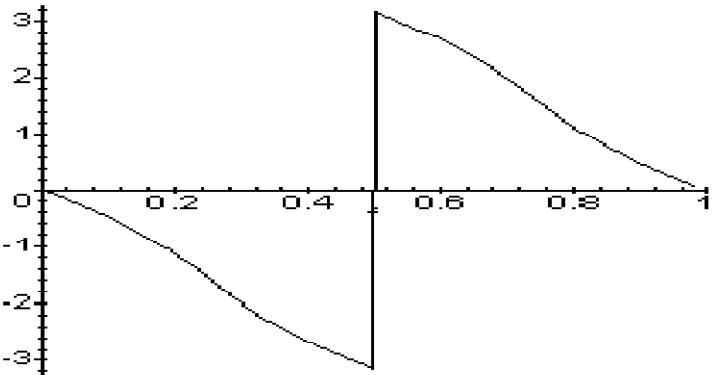
# A-2 Réponse en fréquence des filtres numériques

► Exemple (suite)

### Module



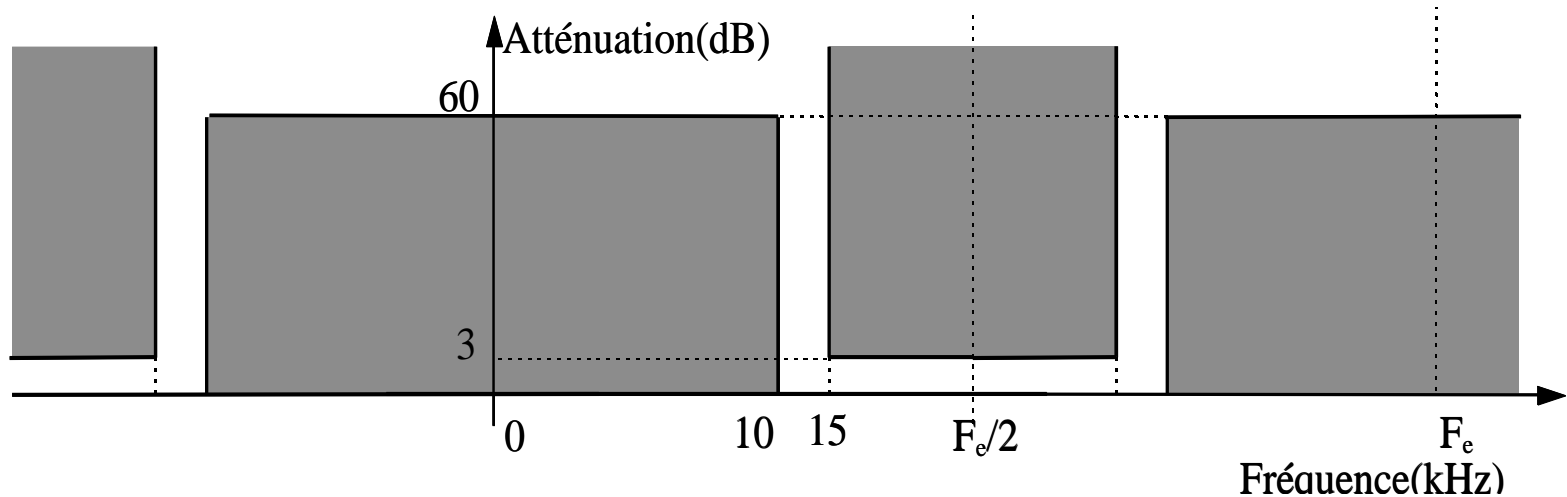
### Phase



Demo Matlab  
FilterDesigner

## A-3 Classification des filtres

- ▶ Passe-bas, passe-haut, passe-bande, etc...
- ▶ Attention: cas des filtres numériques



- Le gabarit est implicitement périodisé
- La bande «intéressante» est  $[0, F_e/2]$
- $F_e$  -----> 1
- $F_e/2$  -----> 0,5
- $f$  ----->  $f/F_e$



# A-3 Classification des filtres

## ...pour les filtres numériques

### ▶ Classification d'après la réponse impulsionnelle

- RIF (*FIR*) Réponse Impulsionnelle finie
- RII (*IIR*) Réponse impulsionnelle infinie

### ▶ Classification méthodologique

- Implantation non réursive (RIF)

$$y(n) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + \dots + a_kx(n-k)$$

- Implantation réursive (RIF et RII)

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_nx(k-n) - b_1y(k-1) - \dots - b_my(k-m)$$

- Implantation par Tr. de Fourier

# Comparaison des filtres RIF et RII

Caractéristique	Filtre FIR	Filtre IIR
Fonction de transfert	Ne contient que des zéros	Contient des pôles et des zéros
Réponse en fréquence	Aucune restriction	Les méthodes sont plutôt limitées aux filtres passe-bas passe-haut, passe-bande et réjecteur
Réponse en phase	Parfaitement linéaire si nécessaire; déphaseurs purs irréalisables	Approximation d'une phase linéaire déphaseurs réalisables
Stabilité	Toujours stables	Les pôles doivent être à l'intérieur du cercle unité
Complexité de la structure	Proportionnelle à la longueur de la réponse impulsionnelle	Plus faible qu'un filtre FIR pour la même sélectivité
Sensibilité à la quantification des coefficients et aux erreurs d'arrondi	Faible, sauf dans le cas d'une réalisation récursive	Les pôles peuvent passer à l'extérieur du cercle unité. Apparition de cycles limites et d'oscillations

---

## **III- Synthèse de filtre numériques**

### **B- Structure des filtres numériques**

## B- Structures de calcul des filtres numériques

- Fonction de transfert en  $Z$   $\longrightarrow$  Équations de réalisation

**Filtre RIF**

$$y(n) = \sum_{i=0}^Q b(i)x(n-i) =$$

$$b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \dots + b(Q)x(n-Q)$$

**Filtre RII**

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(Q)z^{-Q}}{1 + a(1)z^{-1} + \dots + a(P)z^{-P}}$$

$$Y(z) + a(1)Y(z)z^{-1} + \dots + a(P)Y(z)z^{-P} =$$

$$b(0)X(z) + b(1)X(z)z^{-1} + \dots + b(Q)X(z)z^{-Q}$$

Par transformée en  $Z$  inverse, on obtient:

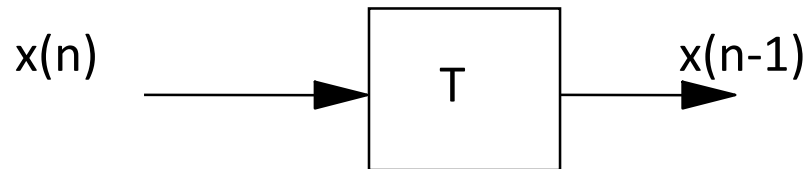
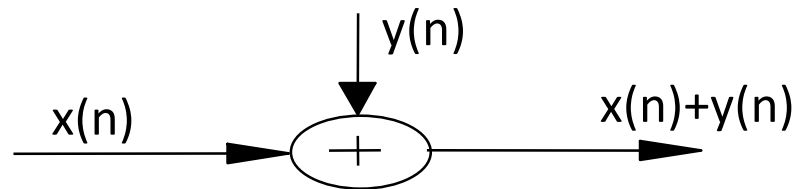
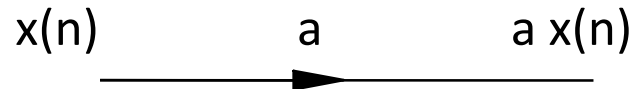
$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \dots + b(Q)x(n-Q) \\ - a(1)y(n-1) - \dots - a(P)y(n-P)$$

## B- Structure des filtres numériques

### ► Calcul des équations précédentes

- Par programme (C, Matlab, langage machine sur mP, DSP...)
- Avec une électronique dédiée (et spécifique)

Additionneurs, multiplieurs, registres (mémoires).



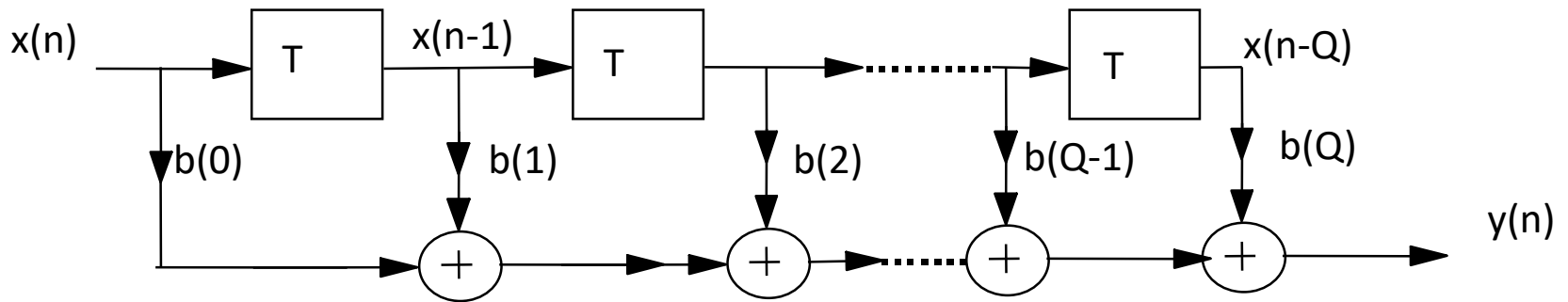
## B- Exemple de réalisation «simpliste» d'un filtre numérique

$$H(z) = \frac{b(0) + b(1) z^{-1} + b(2) z^{-2}}{1 + a(1) z^{-1} + a(2) z^{-2}}$$

```
int x[3],y[2], xin,yout;
float b[3], a[2];
// xin contient l'echantillon d'entree
x[0]=xin;
// calcul du numérateur
for(i=0;i<3;i++)
    yout=yout+x[i]*b[i];
// calcul du dénominateur , partie recursive du filtre
for(i=0;i<2;i++)
    yout=yout-y[i]*a[i];
// decalage du tampon d'entrée
for(i=0;i<2;i++)
    x[i+1]=x[i];
// decalage du tampon de sortie
for(i=0;i<1;i++)
    y[i+1]=y[i];
y[0]=yout;
// sortie de yout
```

## B- Structure des filtres numériques

- Structure non récursive ou filtre transverse

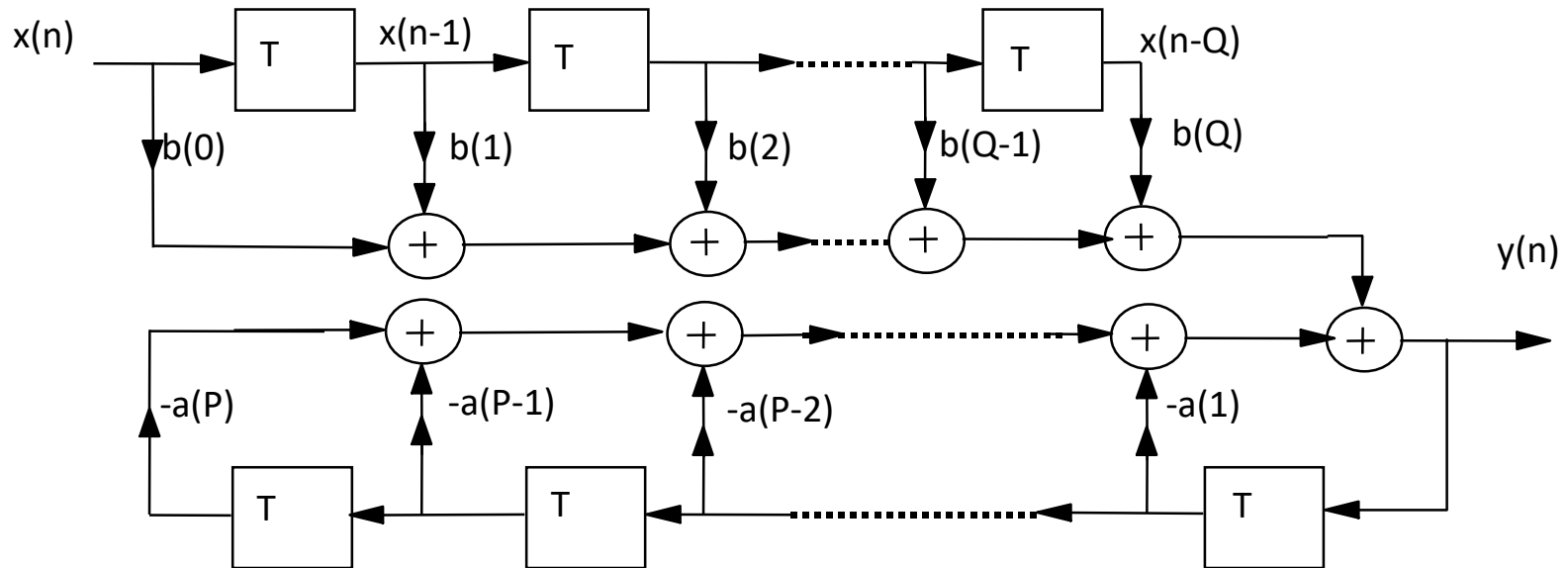


$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \dots + b(Q)x(n-Q)$$

- Q mémoires (tampon, tableau à Q) éléments)
- Q multiplieurs
- Q additionneurs

# B- Structure des filtres numériques

## ► Structure récursive forme directe de type 1



$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \dots + b(Q)x(n-Q) - a(1)y(n-1) - \dots - a(P)y(n-P)$$

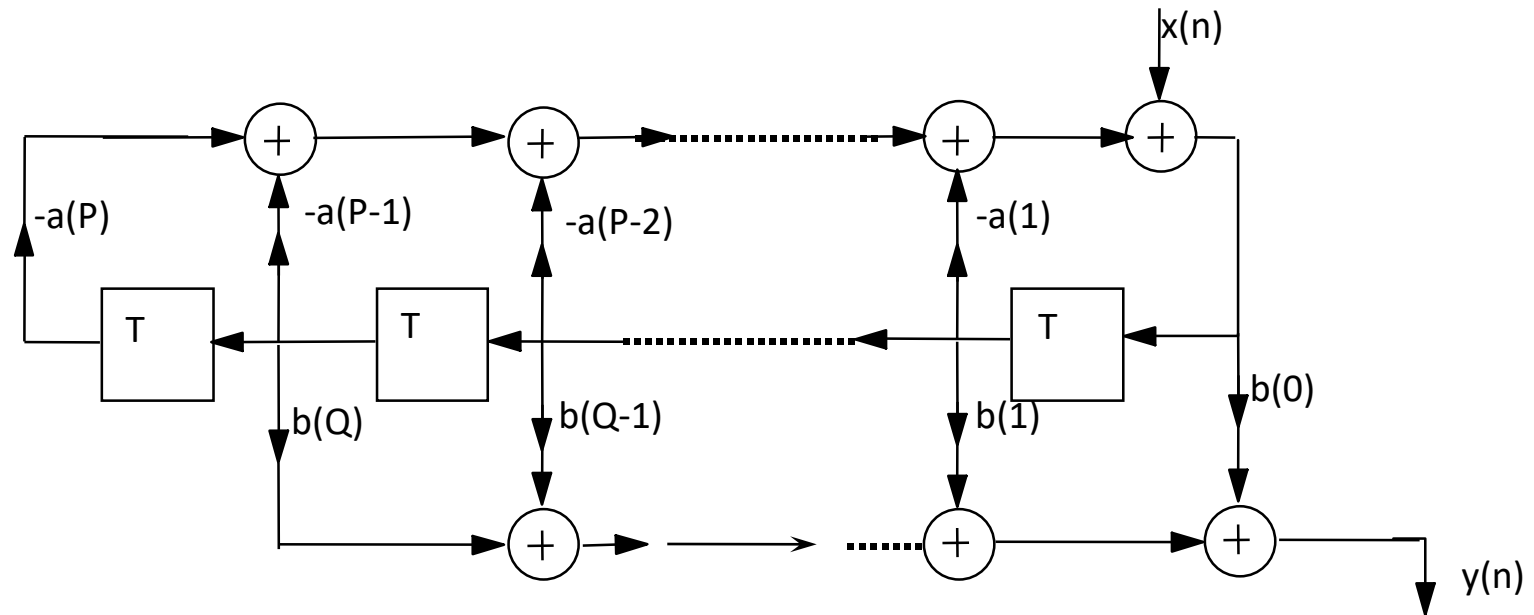
- $Q+P$  mémoires
- $Q+P$  multiplieurs
- $Q+P$  additionneurs



# B- Structure des filtres numériques

## ► Structure récursive

forme canonique directe de type 2



- $\text{Max}(P, Q)$  mémoires
- $P+Q$  multiplieurs
- $P+Q$  additionneurs
- Variable intermédiaire mémorisée: Variable d'état

# B- Structure des filtres numériques

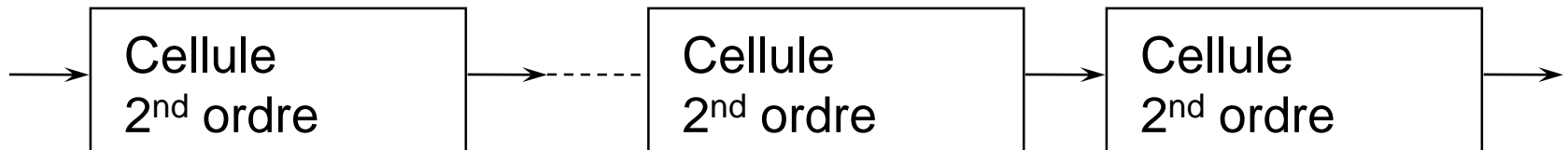
## ► Structure (synthèse en) cascade

- Décomposition en pôles et zéros

$$G(z) = b(0) \frac{\prod_{i=1}^{Q1} (1 - r_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{Q2} (1 - z_i z^{-1})(1 - z_i^* z^{-1})}{\prod_{i=1}^{P1} (1 - s_i z^{-1}) \prod_{i=1}^{P2} (1 - p_i z^{-1})(1 - p_i^* z^{-1})}$$

Regroupement par paires de pôles et de zéros

$$G(z) = \prod_{k=1}^N \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}}$$

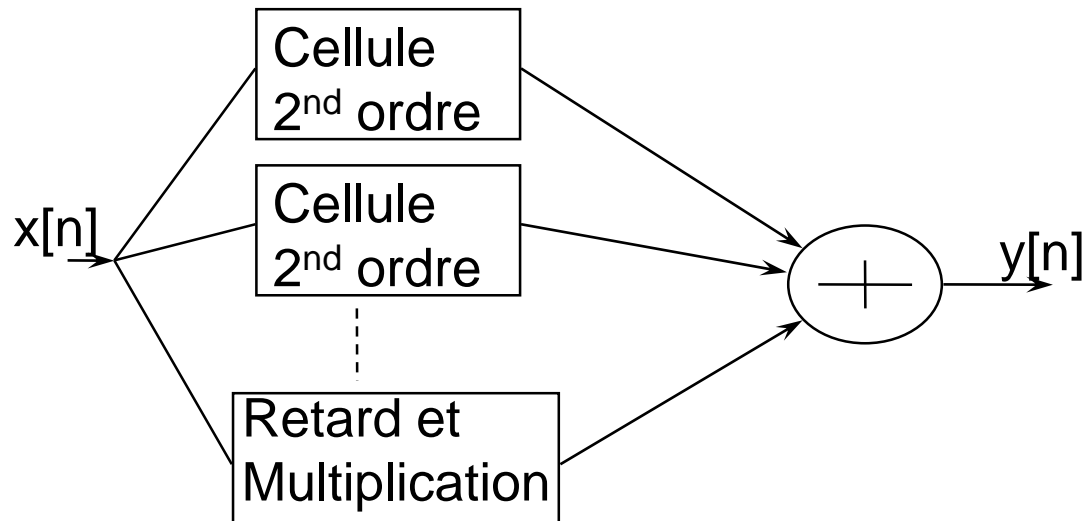


# B- Structure des filtres numériques

## ► Structure parallèle

- Décomposition en fraction partielle

$$G(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - e_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})}$$
$$= \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$$



---

## III- Synthèse de filtre numériques

### C- Filtres RII

- 1- Calcul des filtres RII
- 2- Transformation bilinéaire
- 3- Application

## C-1 Calcul des filtres RII

- ▶ Méthodologies de calcul des filtres RII

$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \dots + b(Q)x(n-Q) \\ - a(1)y(n-1) - \dots - a(P)y(n-P)$$

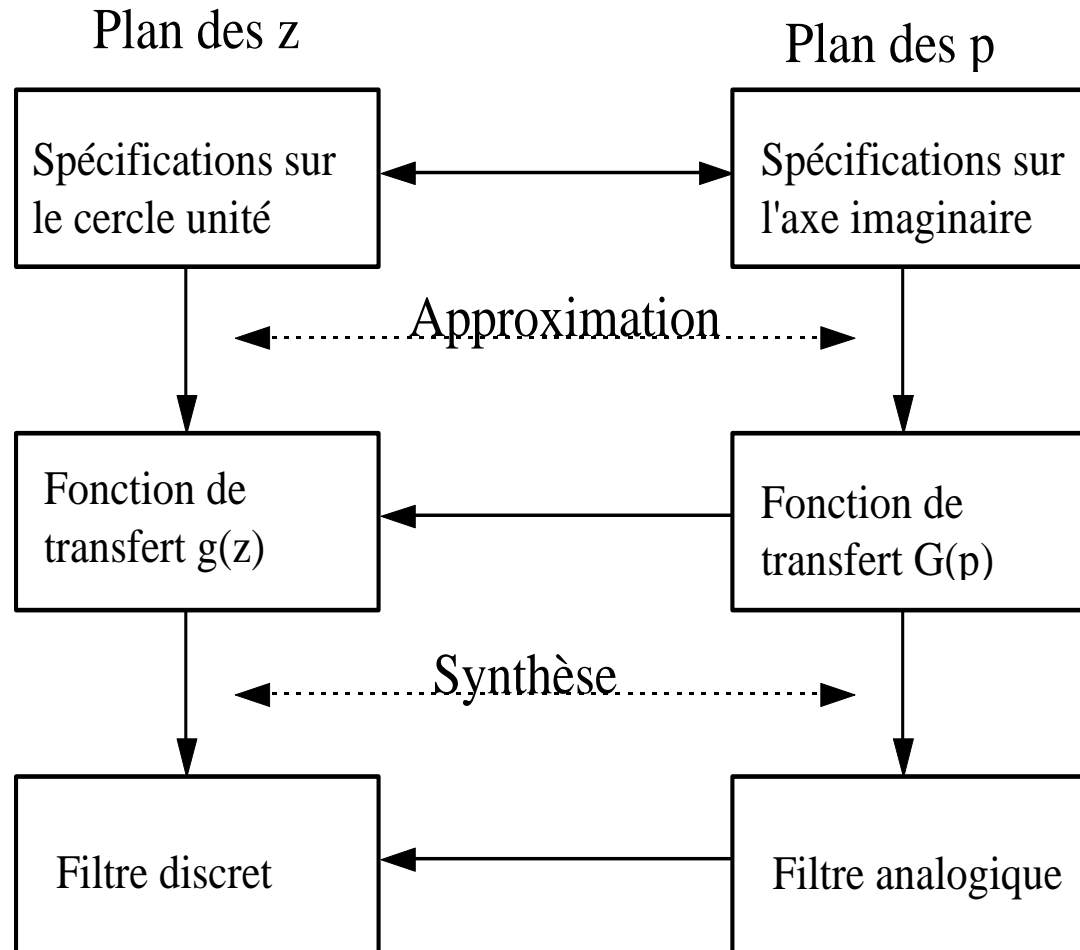
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(Q)z^{-Q}}{1 + a(1)z^{-1} + \dots + a(P)z^{-P}}$$
$$= b(0) \frac{\prod_{i=1}^Q (1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^P (1 - p_i z^{-1})}$$

Ressemblance avec les filtres analogiques  
(Equation différentielle et fonction de transfert)

Filtres analogiques  $\longleftrightarrow$  Filtres numériques RII

## C-1 Calcul des filtres RII

- Différentes approches de la synthèse des filtres numériques RII



## 1) Approximation dans le plan des z et synthèse du filtre discret

Méthodes d'optimisation par ordinateur (Decsky, Remez...)

## 2) Approximation dans le plan de Laplace et synthèse du filtre discret

$$G(p) \longrightarrow G(z)$$

Réponse en fréquence conforme au gabarit initial

Problèmes de repliement de spectre dû à l'échantillonnage

**Filtre numérique stable**

### ► Méthodes d'approximation

- transformation bilinéaire
- mappage des poles et zeros et transformation en z (moins précis que bilinéaire)
- invariant impulsionnel
- invariant indiciel
- équivalence de la dérivation ou de l'intégration

# C-1 Calcul des filtres RII

## 3) Approximation et synthèse dans le domaine analogique

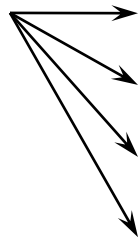
Transformation du circuit analogique en un filtre numérique par simulation des éléments (L,C)

—————> Filtre d'ondes

## 4) Autres méthodes

Transposition

    passe-bas



    passe-bas

    passe-haut

    passe-bande

    coupe-bande

Exemple: passe-bas → passe-haut

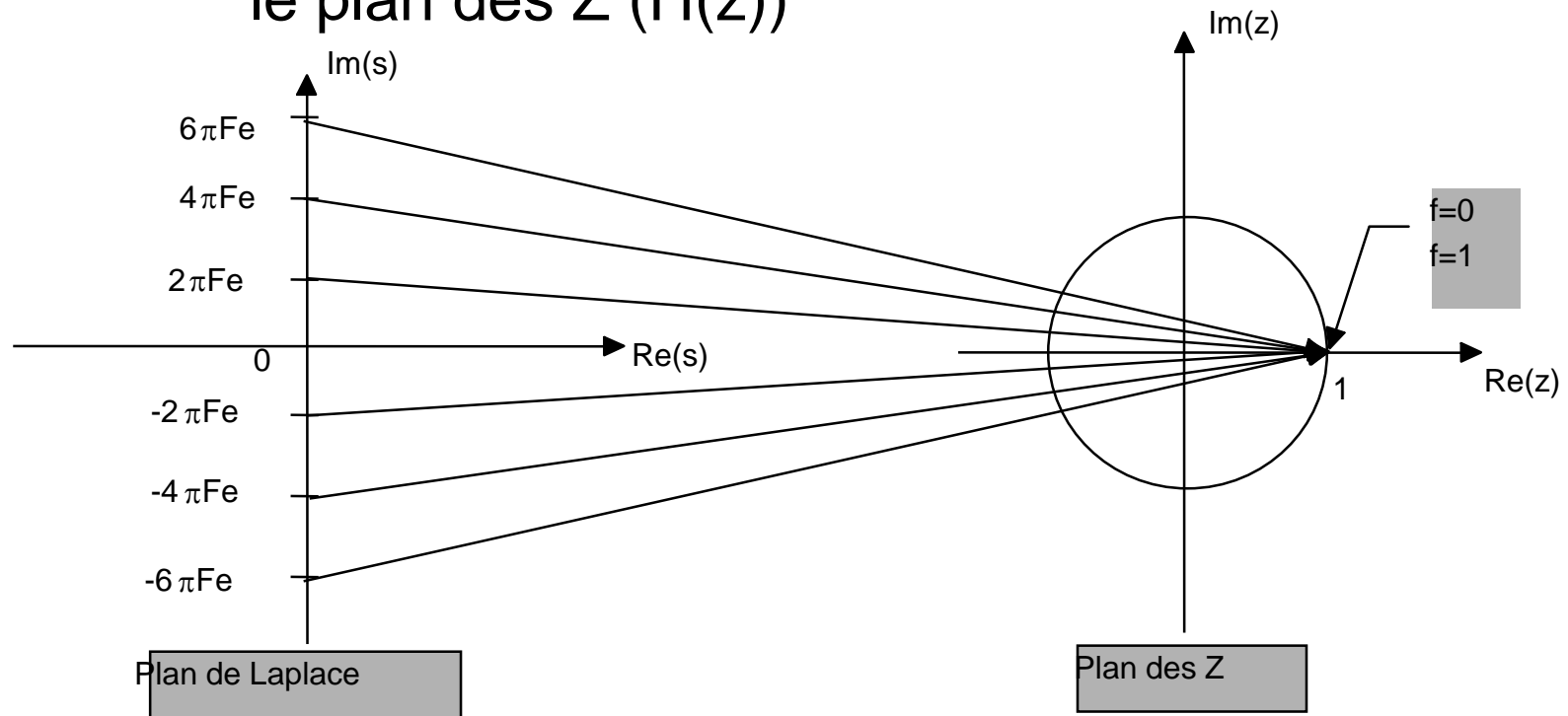
$$z^{-1} \rightarrow -\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \text{ avec } \alpha = -\frac{\cos(\pi(f_{pb} + f_{ph}))}{\cos(\pi(f_{pb} - f_{ph}))}$$



# C-2 Synthèse des filtres RII par transformation bilinéaire

- Transformation du plan de Laplace ( $H(p)$ ) vers

le plan des Z ( $H(z)$ )



- Préserver la réponse en fréquence
- Préserver la stabilité du filtre
- Eviter les problèmes de repliement de spectre

—————> Pas de solution idéale

## C-2 Transformation bilinéaire

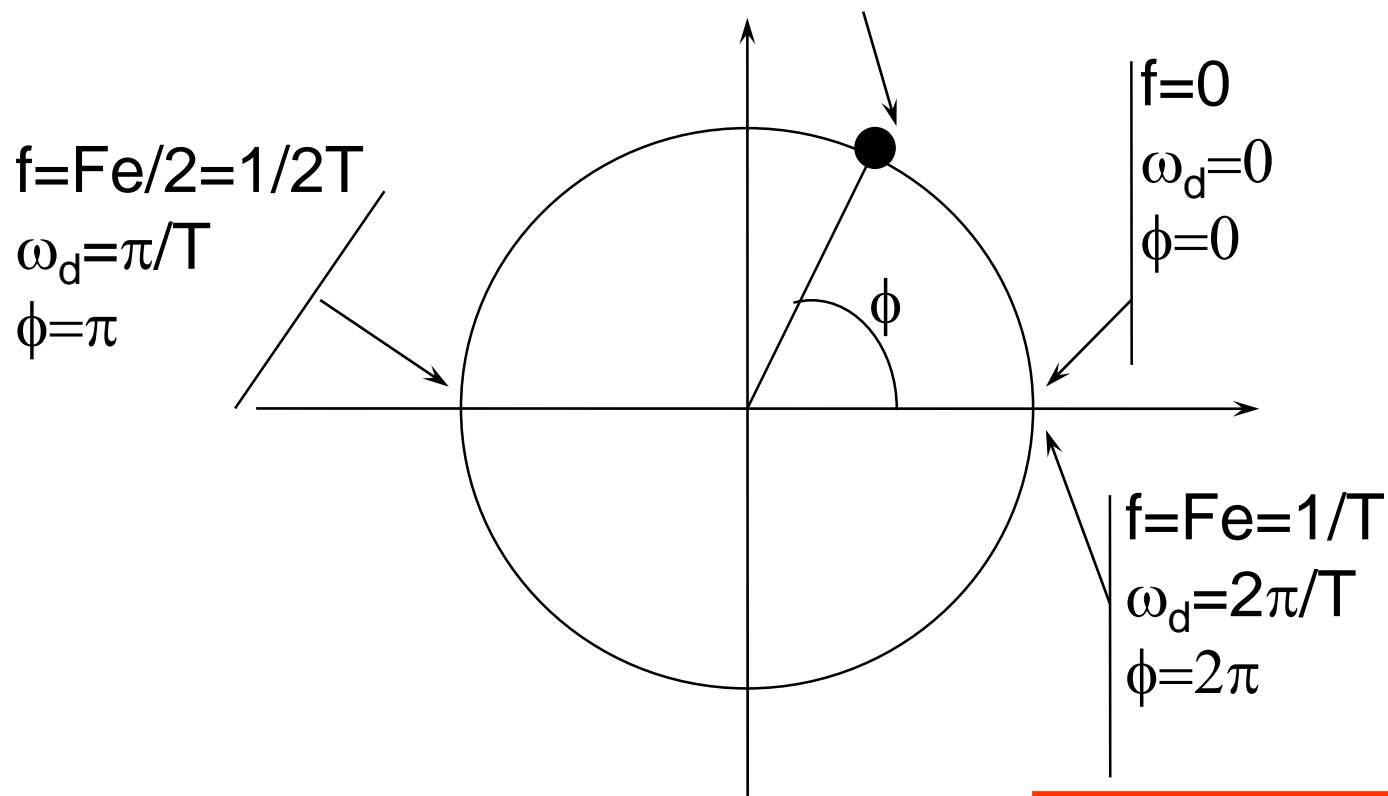
►  $H(p) \longrightarrow H(z)$

$$p = K \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \qquad z = \frac{1 + \frac{p}{K}}{1 - \frac{p}{K}}$$

- $p = 0$   $z = 1$
- $p = j\omega = jK \tan(\phi/2)$   $z = \exp(j\phi)$   
Axe imaginaire du plan de Laplace =  
cercle unité dans le plan des Z
- $p = \pm j\infty$   $z = -1$   
Axe imaginaire complet = 1 tour du cercle unité
- $p = -K$   $z = 0$
- $p = K$   $z = \infty$
- $\text{Reel}(p) < 0$   $|z| < 1$   
Partie gauche du plan de Laplace = Intérieur du cercle unité  
Stabilité du filtre préservée

## C-2 Transformation bilinéaire

►  $p = j\omega_a = jK \tan(\phi/2)$      $z = \exp(j\phi)$



$\omega_d = \phi / T$  : Pulsation «discrète»

$\omega_a$  : Pulsation analogique

$$\omega_a = K \tan\left(\omega_d \frac{T}{2}\right)$$
$$\omega_d = \frac{2}{T} \arctan\left(\frac{\omega_a}{K}\right)$$

## C-2 Transformation bilinéaire

- ▶ On choisit généralement  $K=2/T$   
pour avoir  $\omega_d \approx \omega_a$  ( $\arctan(x) \approx x$ )  
si  $\omega_d \ll 2\pi/T$  (pulsation d'échantillonnage)

- ▶ Equations de la transformation bilinéaire

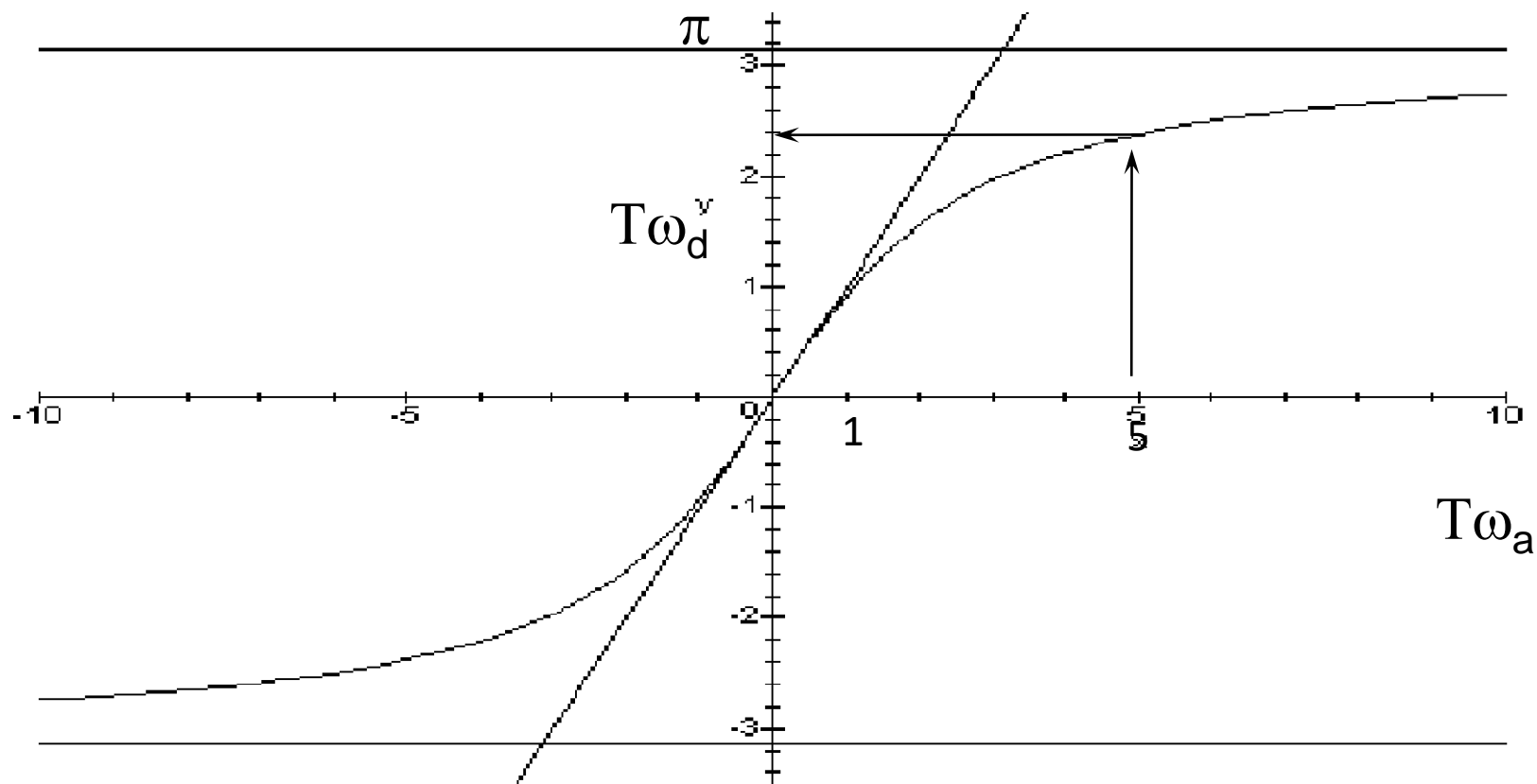
$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan\left(\omega_d \frac{T}{2}\right)$$

$$\omega_d = \frac{2}{T} \arctan\left(\frac{T\omega_a}{2}\right)$$

## C-2 Transformation bilinéaire

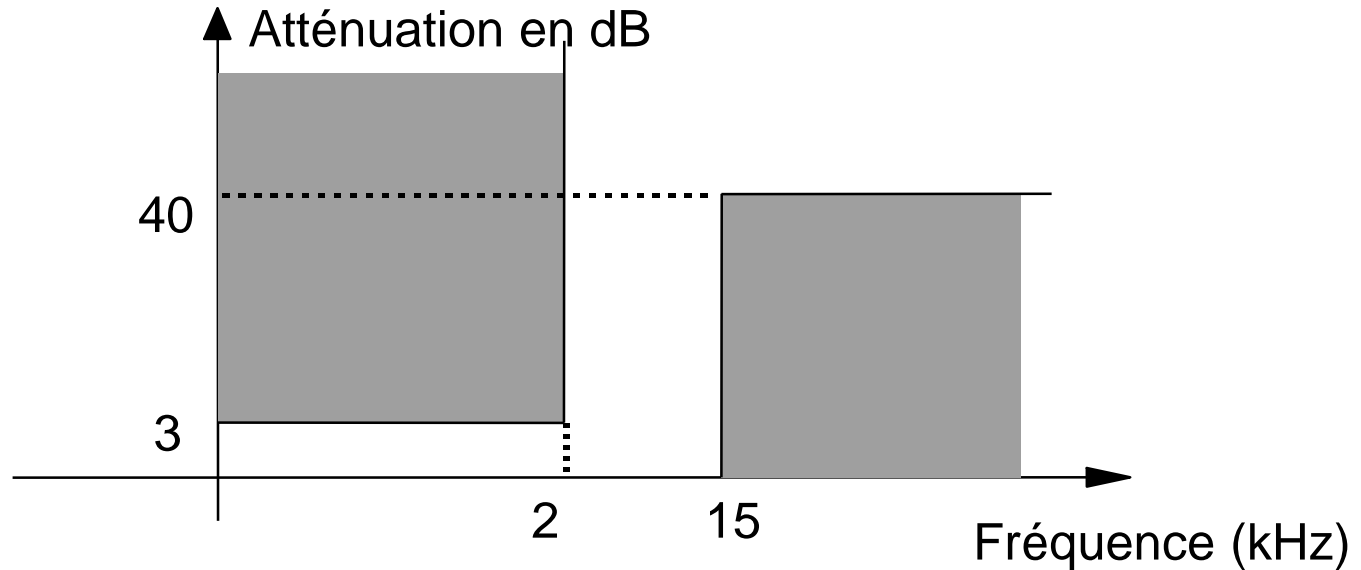
- Passage de la pulsation analogique à la pulsation numérique



Déformation de l'axe des fréquences  
Correction avant calcul du filtre analogique

## C-3 Application

- Calcul d'un filtre numérique passe-bas



Choix de la fréquence d'échantillonnage

$$F_e = 50 \text{ kHz}, T = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

**Objectif:** trouver  $H(p)$  filtre analogique tel que après transformation bilinéaire, la réponse en fréquence de  $H(z)$  respecte le gabarit.

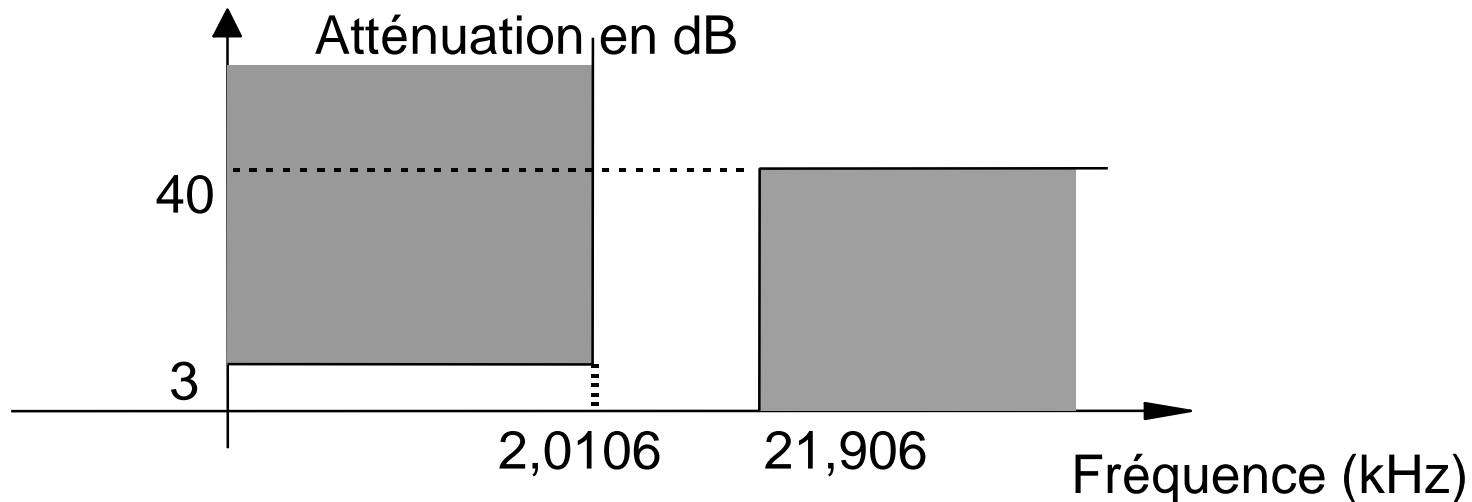
## C-3 Application

- ▶ Comme la transformation bilinéaire déforme l'axe des fréquences, il faut pré-déformer le gabarit

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan\left(\omega_d \frac{T}{2}\right)$$

pour  $f_d = 2$  kHz et 15 kHz, avec  $\omega_d = 2\pi f_d$   
on trouve  $f_a = 2,0106$  kHz et 21,906 kHz

### Gabarit «analogique» correspondant



## C-3 Application

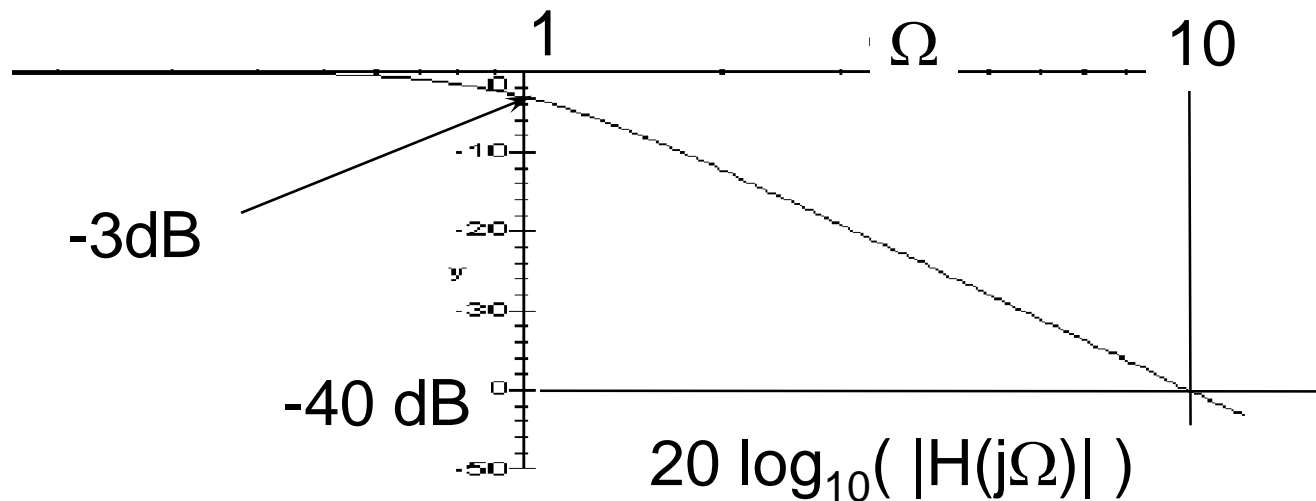
- ▶ Abaques
- ▶ Matlab
- ▶ Calcul
- ▶ 1 décade 40 dB : ordre 2

} Butterworth ordre 2  
(par exemple)

$$H(s) = \frac{1}{1 + \sqrt{2}s + s^2}$$

s : variable de Laplace  
normalisée  $p/\omega_0$

- Réponse en fréquence pour  $s = j\Omega$





## C-3 Application

- ▶ Sur le gabarit initial, à 3dB  $\omega_0 = 2 \pi 2010,6 = 12633 \text{ rd/s}$

Dénormalisation:  $H(s)$  avec  $s = p/\omega_0$

$$H(p) = \frac{1}{1 + 1,12 \cdot 10^{-4} p + 6,27 \cdot 10^{-9} p^2}$$

Application de la transformation bilinéaire

$$p = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad T = 1/F_e = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

$$H(z) = 0,01596 \frac{(1 + z^{-1})^2}{1,195 - 1,968z^{-1} + 0,8373z^{-2}}$$

## C-3 Application

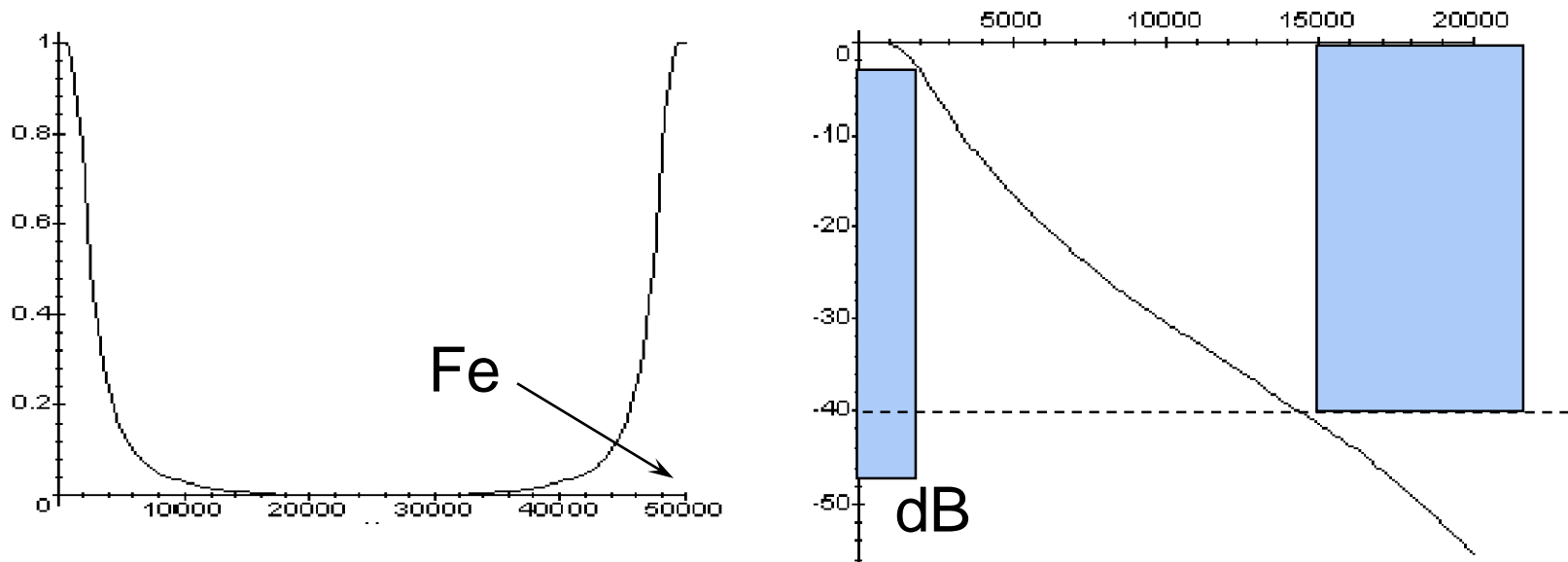
$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^2}{74,87 - 123,3z^{-1} + 52,46z^{-2}}$$

$$H(z) = 0,01336 \frac{(1 + z^{-1})^2}{1 - 1,647z^{-1} + 0,7007z^{-2}}$$

- ▶ Réponse en fréquence de  $H(z)$

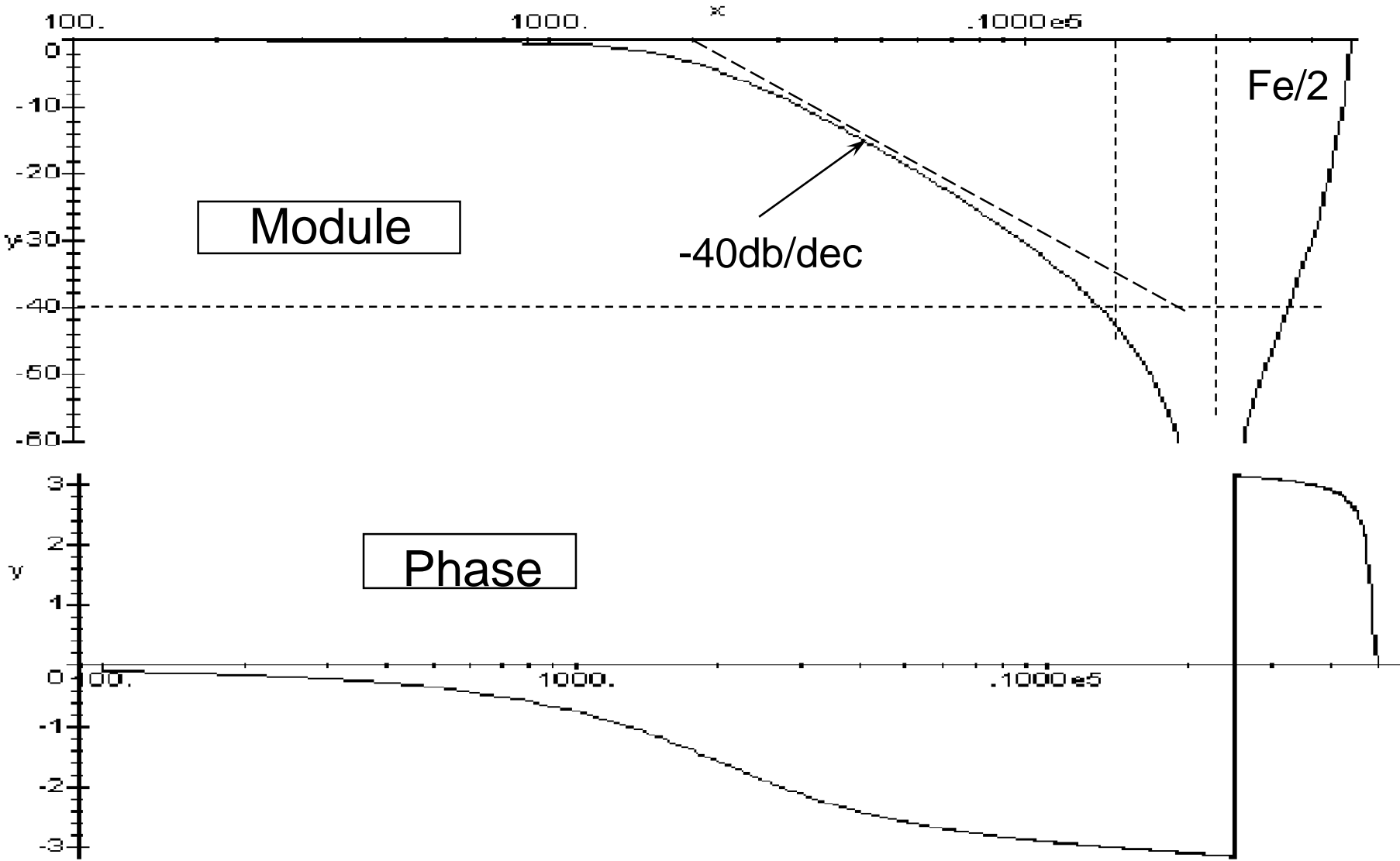
$$z = \exp(j2\pi f/F_e),$$

*tracé de  $H(j2\pi f/F_e)$*



# C-3 Application

Tracé en échelle log



## C-3 Fonctions du 2<sup>nd</sup> ordre et transformation bilinéaire

► Fonction normalisée d'ordre 2 analogique

- Q: facteur de surtension
- Pulsation de résonance  $\approx 1$

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{s}{Q} + s^2}$$

• transformation bilinéaire

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 + \frac{4}{T^2} + \frac{2}{QT}\right) + \left(2 - \frac{8}{T^2}\right)z^{-1} + \left(1 + \frac{4}{T^2} - \frac{2}{QT}\right)z^{-2}}$$

→ Pour éviter la déformation de la transformation bilinéaire:  $T \ll 1$

$$H(z) \approx \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(\frac{4}{T^2} + \frac{2}{QT}\right) - \left(\frac{8}{T^2}\right)z^{-1} + \left(\frac{4}{T^2} - \frac{2}{QT}\right)z^{-2}}$$

!

$$= \frac{T^2}{4} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{\left(1 + \frac{T}{2Q}\right) - 2z^{-1} + \left(1 - \frac{T}{2Q}\right)z^{-2}}$$

<p>Pôle <math>z = 1</math> Instable</p>
---

Problème de la précision de codage des coefficients

## C-3 Fonctions du 2<sup>nd</sup> ordre et transformation bilinéaire

- ▶ Exemple Q=1

$$H(s) = \frac{1}{1 + s + s^2}$$

$$T=0.01$$

Calcul exact

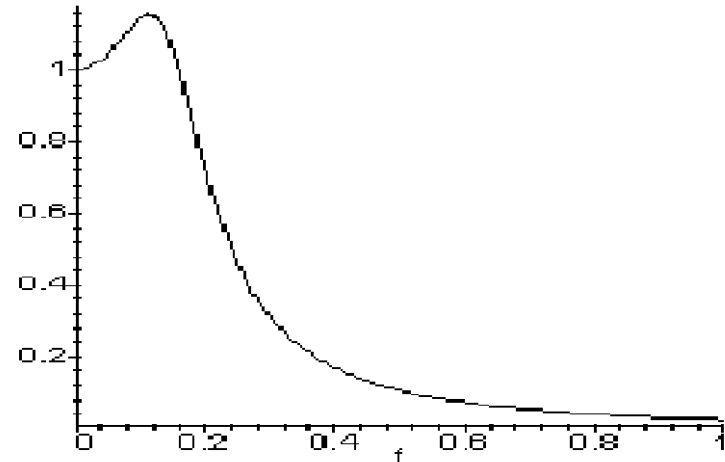
$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{40201 - 79998z^{-1} + 39801z^{-2}}$$

Calcul approché : **Filtre instable**

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{40200 - 80000z^{-1} + 39800z^{-2}}$$

0,0025% d'erreur sur les coefficients → instable !

Codage des coefficients sur plus de 16 bits, ajustement...



## III- Synthèse de filtre numériques

### D- Filtres RIF (réponse impulsionnelle finie)

- 1- Calcul des filtres RIF
- 2- RIF à phase linéaire
- 3- Exemple de calcul

## D-1 Calcul des filtres RIF

- Méthodologies de calcul des filtres RIF

$$y(n) = \sum_{i=0}^M b(i)x(n-i) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + \dots + b(M)x(n-M)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b(0) + b(1)z^{-1} + \dots + b(M)z^{-M} = b(0) \prod_{i=1}^M (1 - z_i z^{-1})$$

- $G(z)$  ne possède que des zéros (pôle d'ordre  $M$  en  $z=0$ )
- Inconditionnellement stable
- Pas d'analogie avec les filtres continus
- Réponse impulsionnelle  $b(i)$ ,  $i=0, M$
- Réponse en fréquence T.F. de  $b(i)$

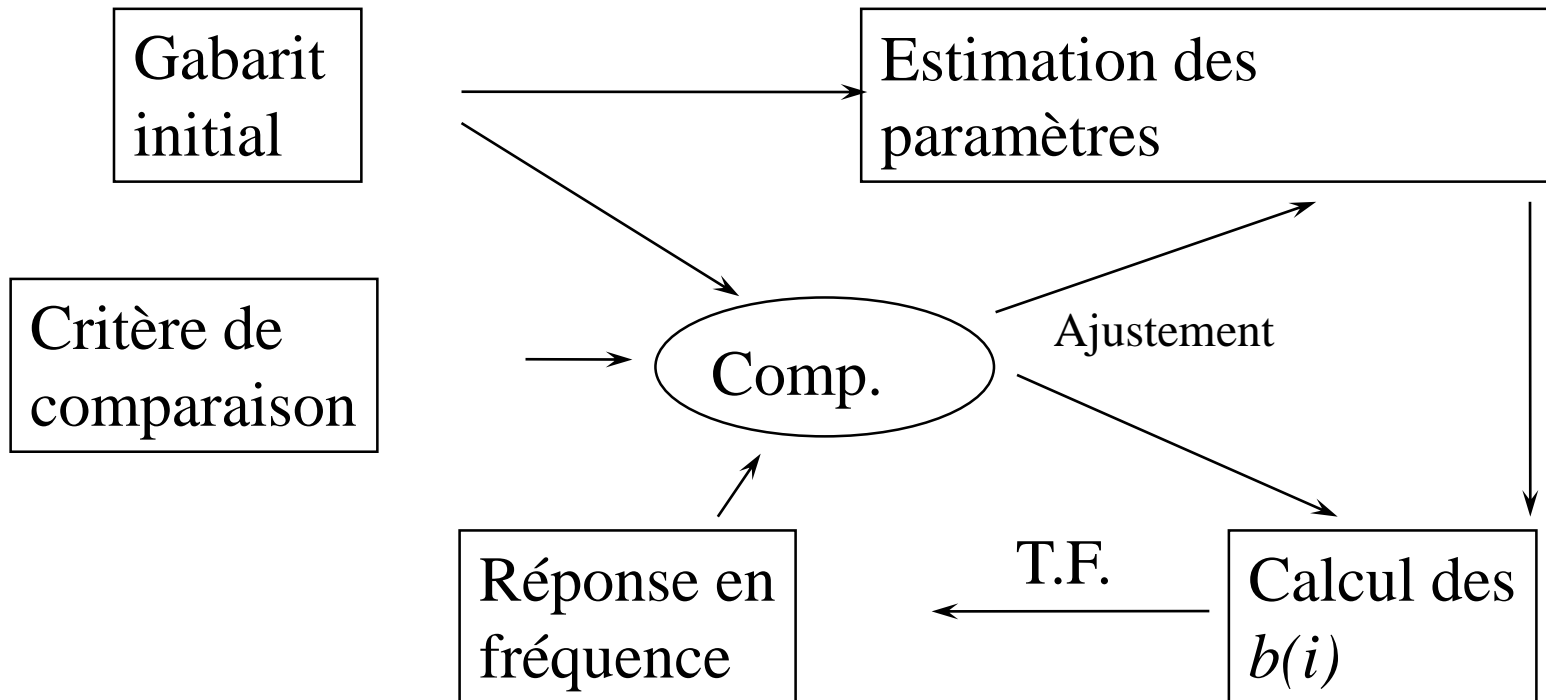
$$G(f) = \sum_{k=0}^M b[k] \exp(-2j\pi f k) = G(z) \Big|_{z=\exp(j2\pi f)}$$

## D-1 Calcul des filtres RIF

- ▶ Méthodologie de calcul des filtres RIF

Relation forte (T. Fourier) entre les coefficients du filtre  $b(i)$  et sa réponse en fréquence  $G(f)$

- ▶ Utilisation de la décomposition en série de Fourier ou de la transformation de Fourier discrète





## D-1 Calcul des filtres RIF

### ► Décomposition en série de Fourier et fenêtrage (*Window method*)

- On cherche un filtre discret de réponse impulsionnelle  $h_{rif}[n]$  *causale et de durée finie*
- rép. en fréquence pour  $h[n]$  quelconque

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \exp(-j2\pi fn) \quad , f = [0,1]$$

$H(f)$  périodique, donc décomposition en série de Fourier

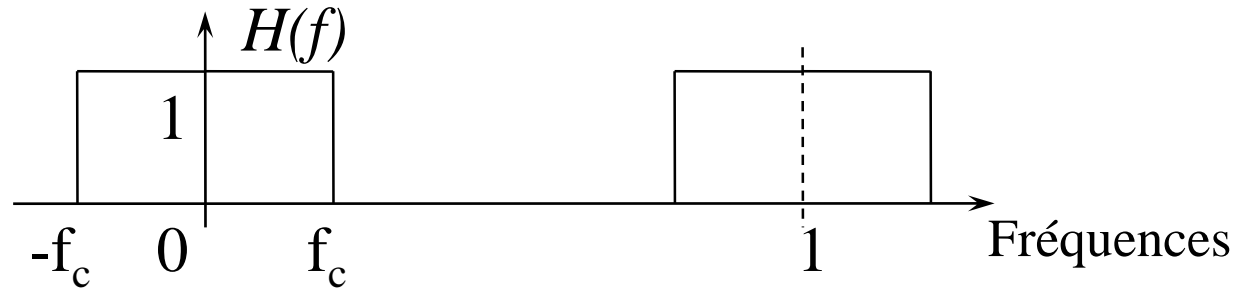
$$h[n] = \int_{f=0}^1 H(f) \exp(j2\pi fn) df$$

$h[n]$  infinie, donc troncature (fenêtrage):  $h_d[n] = h[n] \cdot w[n]$

Exemple:  $w[n]$  fonction rectangle  $w[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$

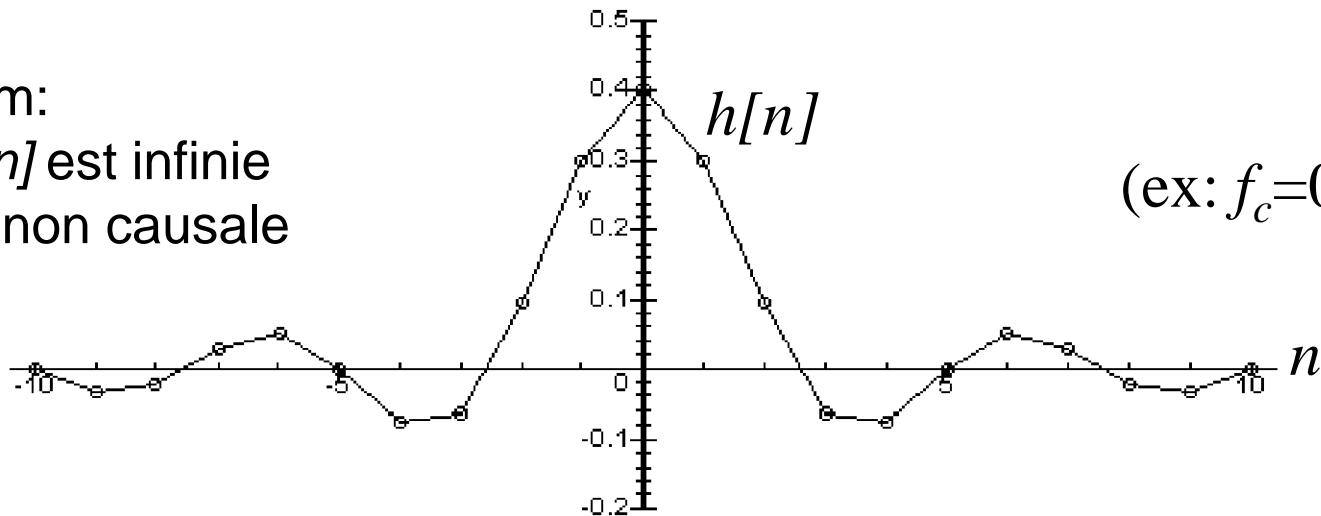
# D-1 Calcul des filtres RIF

- ▶ Exemple  
filtre passe-bas idéal



$$h[n] = \int_{-f_c}^{f_c} \exp(j2\pi fn) df = \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi f_c n)$$

rem:  
 $h[n]$  est infinie  
et non causale

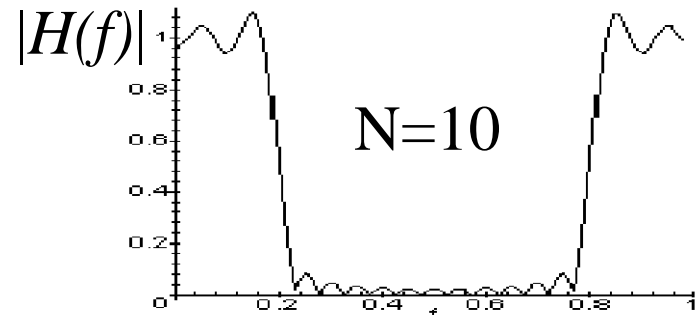
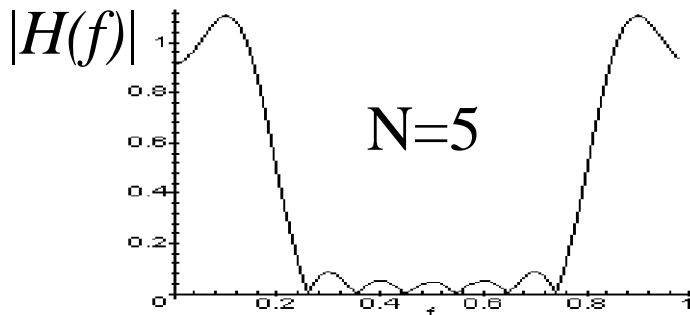
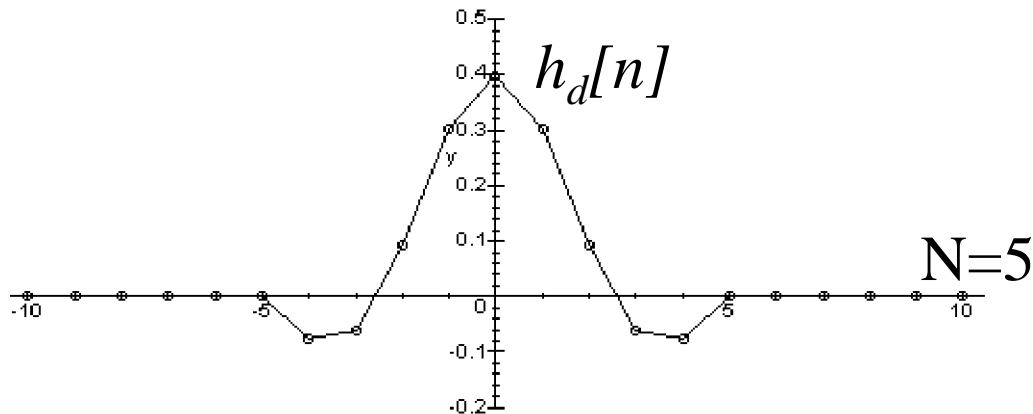


# D-1 Calcul des filtres RIF

- Fenêtrage par une fonction rectangle

$$w[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } -N \leq n \leq N \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

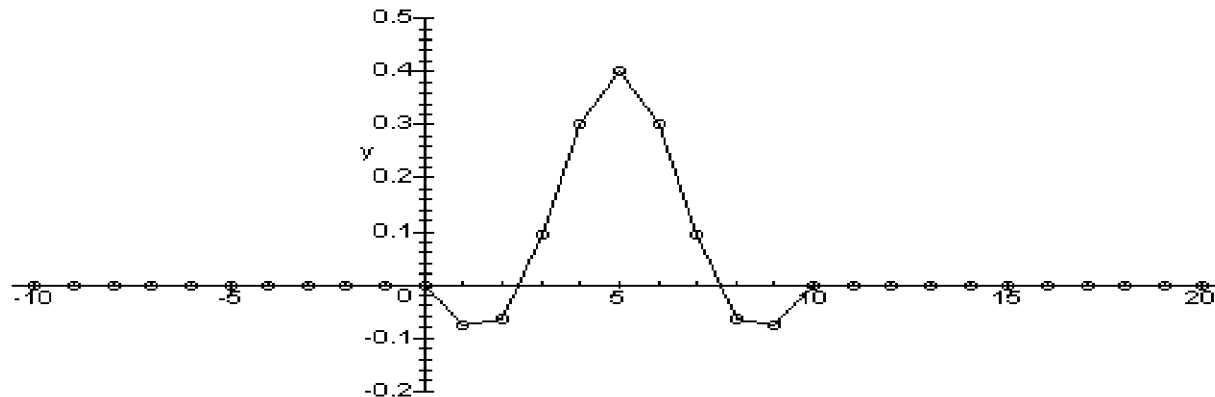
$$h_d[n] = \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi f_c n) \quad , \quad n = [-N, N]$$



## D-1 Calcul des filtres RIF

- ▶ Retard temporel pour rendre le filtre causal

$$h_{rif}[n] = \frac{1}{\pi(n-N)} \sin(2\pi f_c(n-N)) \quad , \quad n = [0, 2N]$$



Réponse en fréquence inchangée en module  
Introduction d'un déphasage linéaire en fréquence

Remarque: dans l'exemple, le premier ( $n=0$ ) et le dernier ( $n=10$ ) coefficients sont nuls.  $N=4$  aurait été suffisant.

# D-1 Calcul des filtres RIF

## ► Effet du fenêtrage

- Ondulation en bande passante et en bande coupée
- Bande de transition élargie

... multiplication temporelle par  $w[n]$  (ex: fonction rectangle)

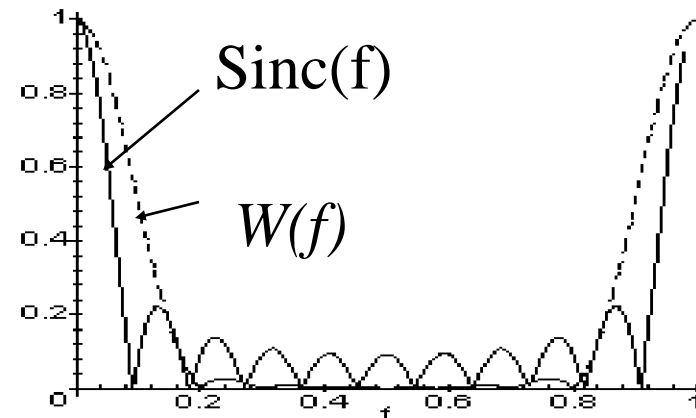
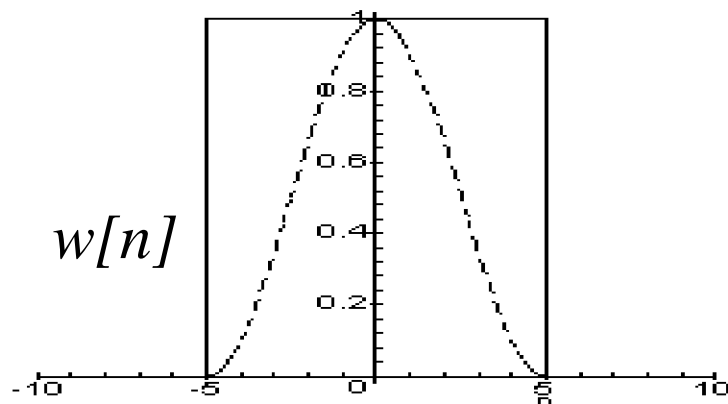
→ convolution en fréquence par  $W(f)$  (ex: Sinus cardinal)

## ► Utilisation de fenêtres $w[n]$ particulières

*Bartlett, Hanning, Hamming, Kaiser...*

exemple: fenêtre de Hanning:      ondulation réduite, transition élargie

$$w[n] = 0.5 + 0.5 \cos(n\pi / N), |n| \leq N$$



# D-1 Calcul des filtres RIF

## ▶ Méthode d'échantillonnage en fréquence

- Gabarit,  $-F_e/2$  à  $F_e/2$
- Choix d'une fonction  $H(f)$  périodique respectant le gabarit
- Échantillonnage sur  $N$  points de  $0$  à  $N-1$
- Transformée de Fourier discrète inverse sur  $N$  points et décalage :

$$h[n], n=0, N-1$$

## ▶ Méthodes d'approximation optimales

- Procédures itératives
- Optimisation au sens d'un certain critère par rapport au gabarit initial
- Utilisation d'un ordinateur
- Choix empirique de certains paramètres

ex: Méthode de Remez, algorithme de Parks & McClellan

## D-2 Filtrés RIF à phase linéaire

- ▶ Réponse en phase linéaire en fréquence  
**réponse en fréquence  $H(f)$**

Module  $|H(f)|$

Phase  $\text{Arg}(H(f)) = \alpha + \beta\phi$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$$

- ▶ Décalage temporel

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} X(f) \exp(-j2\pi f t_0)$$

$$\varphi(f) = -2\pi f t_0$$

**Module identique**

**Déphasage linéaire**

- ▶ Temps de propagation de groupe constant

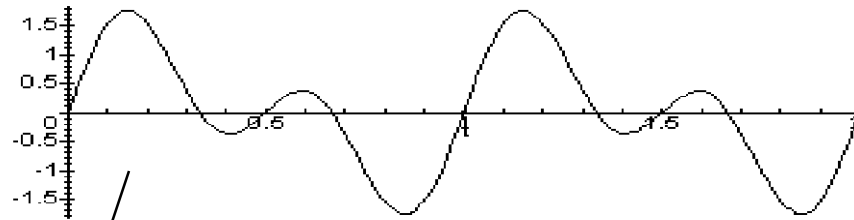
$$\tau = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f)}{df} = t_0$$

Déphasage linéaire (dans la bande passante)=

signal (dans la bande passante) retardé, non déformé

# D-2 Filtrés RIF à phase linéaire

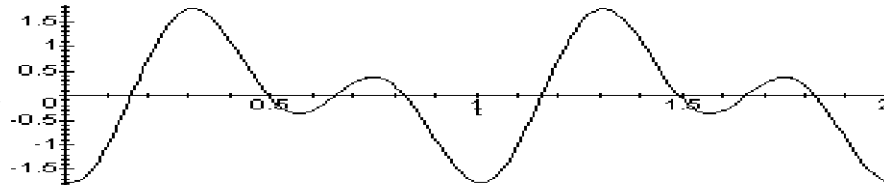
► Exemple  $\sin(2\pi f_0 t) + \sin(2\pi 2 f_0 t)$



$$\sin(2\pi f_0 t - 1) + \sin(2\pi 2 f_0 t - 2)$$

Déphasage  
linéaire en  
fréquence

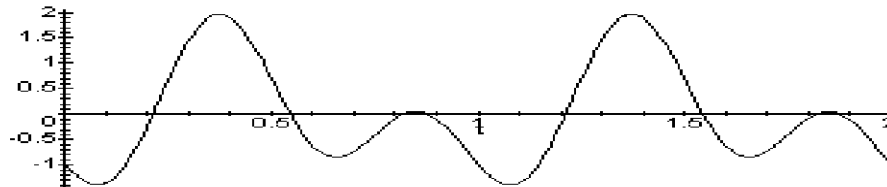
retard



$$\sin(2\pi f_0 t - 1) + \sin(2\pi 2 f_0 t - 3)$$

Déphasage  
non linéaire

Signal déformé





## D-2 Filtrés RIF à phase linéaire

- Temps de propagation de groupe des filtres numériques

Déphasage linéaire

$$\varphi(f) = -2\pi f t_0 = -2\pi f n T_e \quad f \text{ fréquence vraie (Hz)}$$

$$\varphi(f_d) = -2\pi f_d n$$

$$f_d \text{ fréq. discrète } f_d \in [0, 1]$$

Temps de propagation de groupe

$$\tau = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(f_d)}{df_d} = n \quad \underline{\text{échantillons}}$$

Retard introduit par le filtre numérique dans la bande passante

## D-2 Filtrés RIF à phase linéaire

- Filtre à réponse en phase linéaire si les  $M+1$  coefficients  $h[n]$  respectent:

$$h[2\alpha - n] = h[n] \quad \text{avec } 2\alpha = M \text{ entier,}$$

$$\text{ou } h[2\alpha - n] = -h[n] \quad n=[0, M]$$

Parité ou imparité par rapport au point  $\alpha$

Condition suffisante mais non nécessaire

Filtre causal nécessairement de type RIF

### ► Intuitivement....

$h(t)$  réelle, paire  $\longleftrightarrow$   $H(f)$  réelle, paire

$h(t)$  réelle, impaire  $\longleftrightarrow$   $H(f)$  imag., paire

+

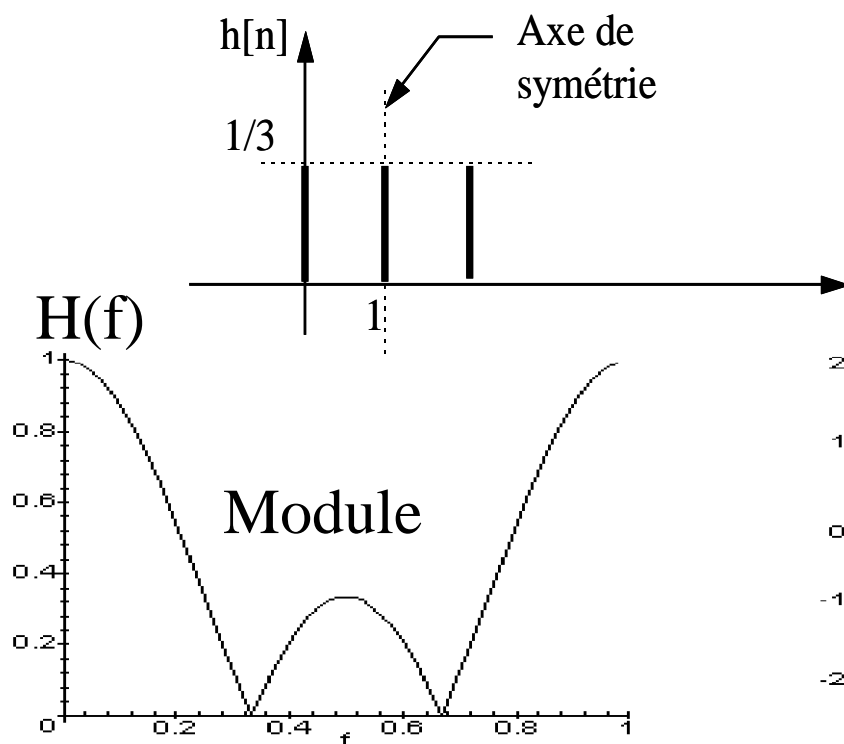
Retard pur  $\longleftrightarrow$  phase linéaire

## D-2 Filtres RIF à phase linéaire

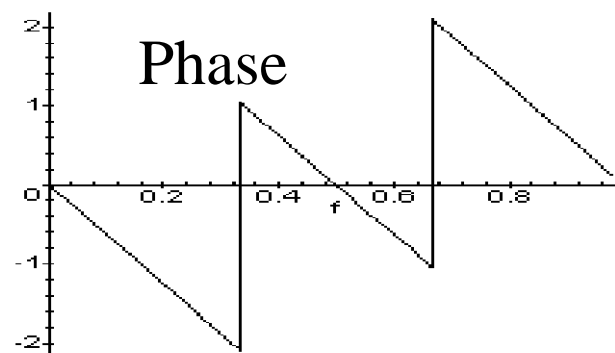
### 4 cas possibles (suivant parité de M et de $h[n]$ )

#### ► Filtres de type I

- M pair
- nombre impair de coefficients M+1
- Symétrie autour du point M/2 entier



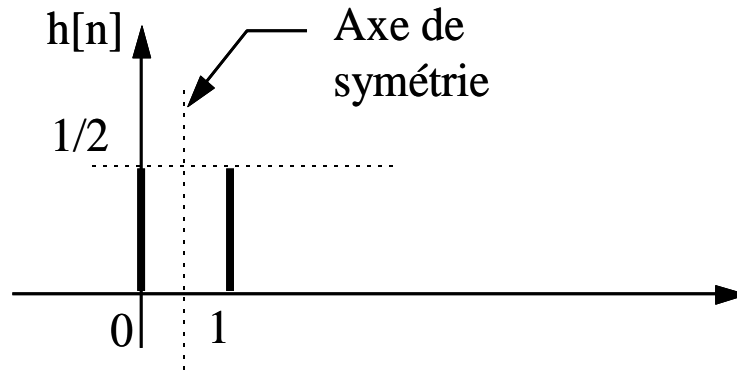
$$H(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$$



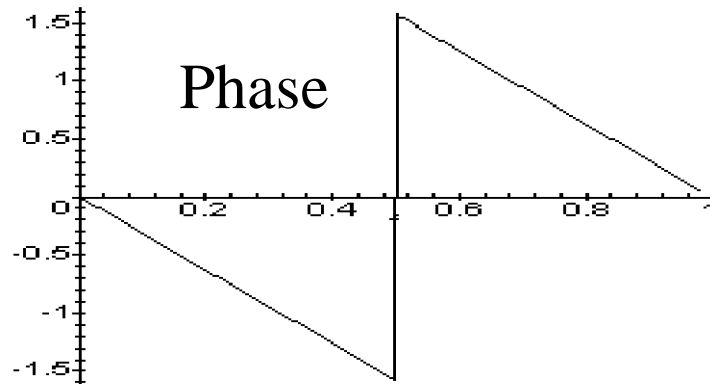
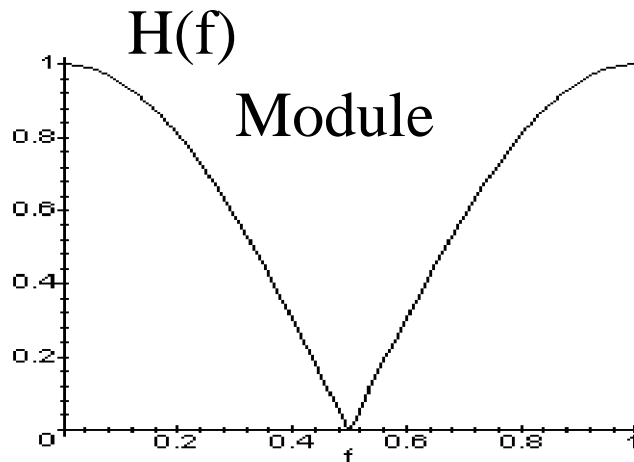
## D-2 Filtrés RIF à phase linéaire

### ► Filtrés de type II

- M impair
- Nombre pair de coefficients M+1
- Symétrie autour du point M/2 non entier



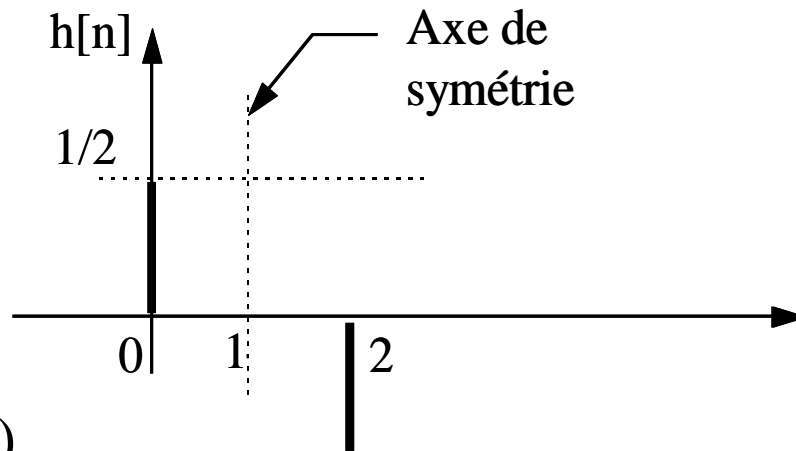
$$H(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z^{-1}$$



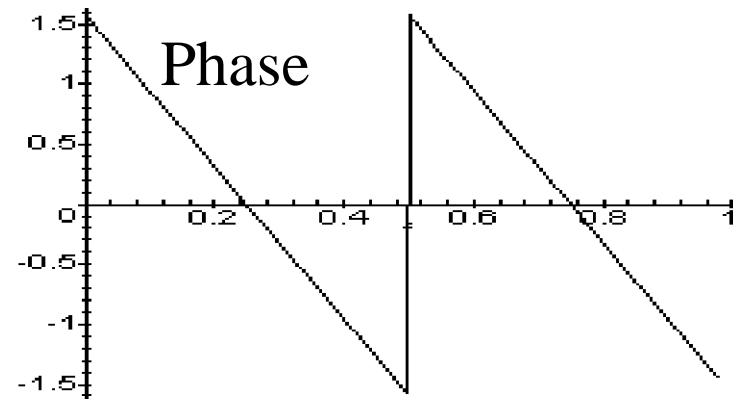
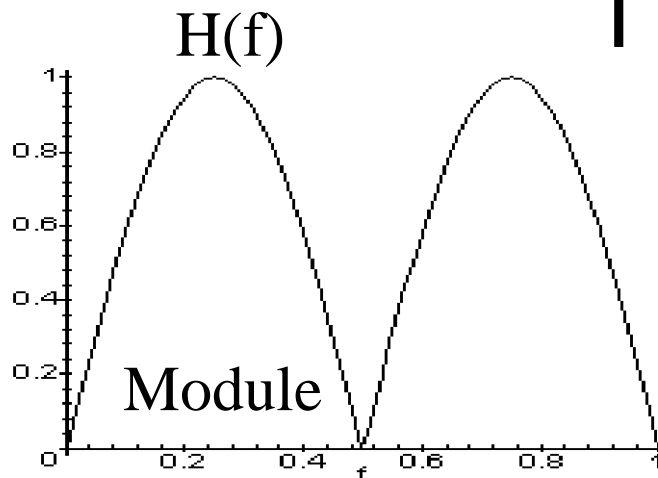
## D-2 Filtrés RIF à phase linéaire

### ► Filtrés de type III

- M pair
- Nombre impair de coefficients M+1
- Antisymétrie autour du point M/2 entier



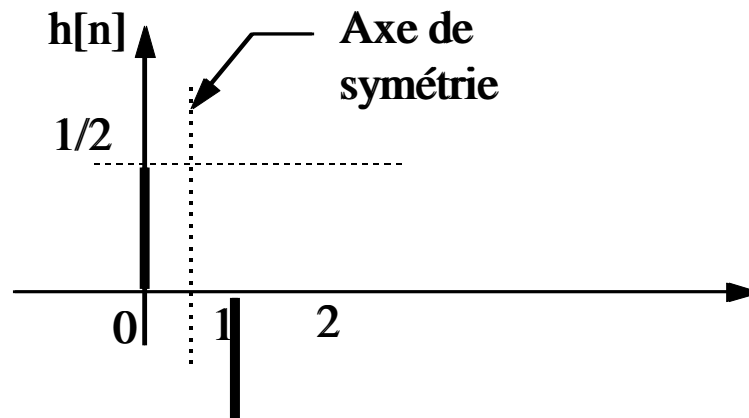
$$H(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-2}$$



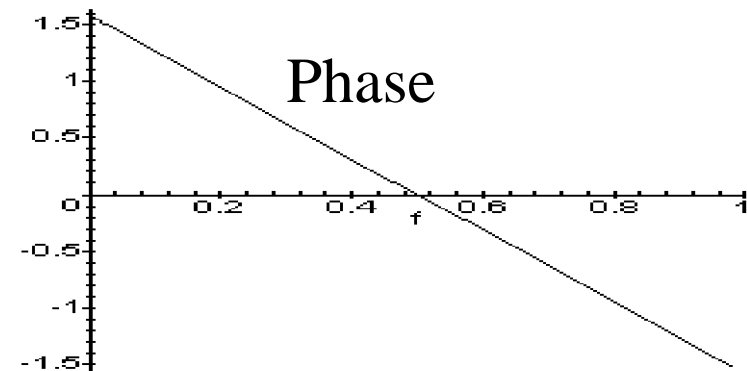
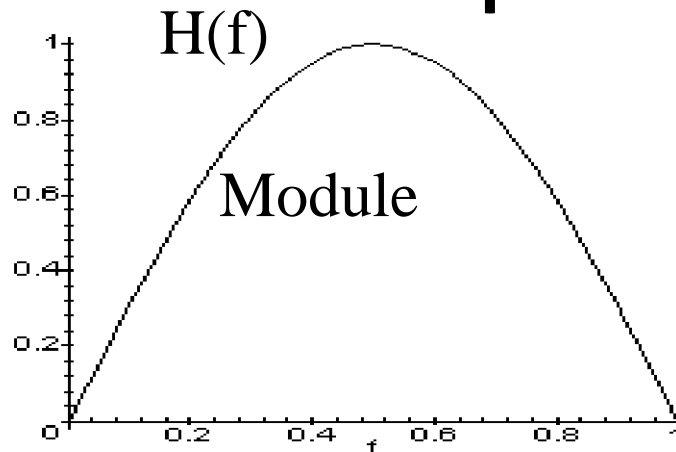
## D-2 Filtres RIF à phase linéaire

### ► Filtres de type IV

- M impair
- Nombre pair de coefficients M+1
- Antisymétrie autour du point M/2 non entier



$$H(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^{-1}$$



## D-2 Filtrés RIF à phase linéaire

- Réponse en fréquence

$$H(f) = \sum_{n=0}^M h[n] \exp(-j2\pi fn) \quad , f = [0,1]$$

avec  $h[M - n] = h[n]$

ou  $h[M - n] = -h[n]$

Simplification dans H(f) (exp  $\longrightarrow$  sin ou cos)

exemple: **Type III**

$$H(f) = j \exp(-j2\pi f \frac{M}{2}) \left[ 2 \sum_{k=1}^{M/2} h[(M/2) - k] \sin(2\pi fk) \right]$$

$H(f)$  imaginaire

$H(f)=0$  pour  $f = 0$  et  $f = 0,5$

## D-2 Filtres RIF à phase linéaire

	<b>I</b>	<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>
<b>M</b>	<b>pair</b>	<b>impair</b>	<b>pair</b>	<b>impair</b>
<b>Nb Coeff.</b>	<b>impair</b>	<b>pair</b>	<b>impair</b>	<b>pair</b>
<b>h[n]</b>	<b>paire</b>	<b>paire</b>	<b>impaire</b>	<b>impaire</b>
<b>H(0)</b>			<b>0</b>	<b>0</b>
<b>H(0,5)</b>		<b>0</b>	<b>0</b>	
<b>H(f)</b>	<b>réelle</b>	<b>réelle</b>	<b>imag.</b>	<b>imag.</b>

Type I: Tout type de filtre possible

Type II: Pas de filtre passe-haut

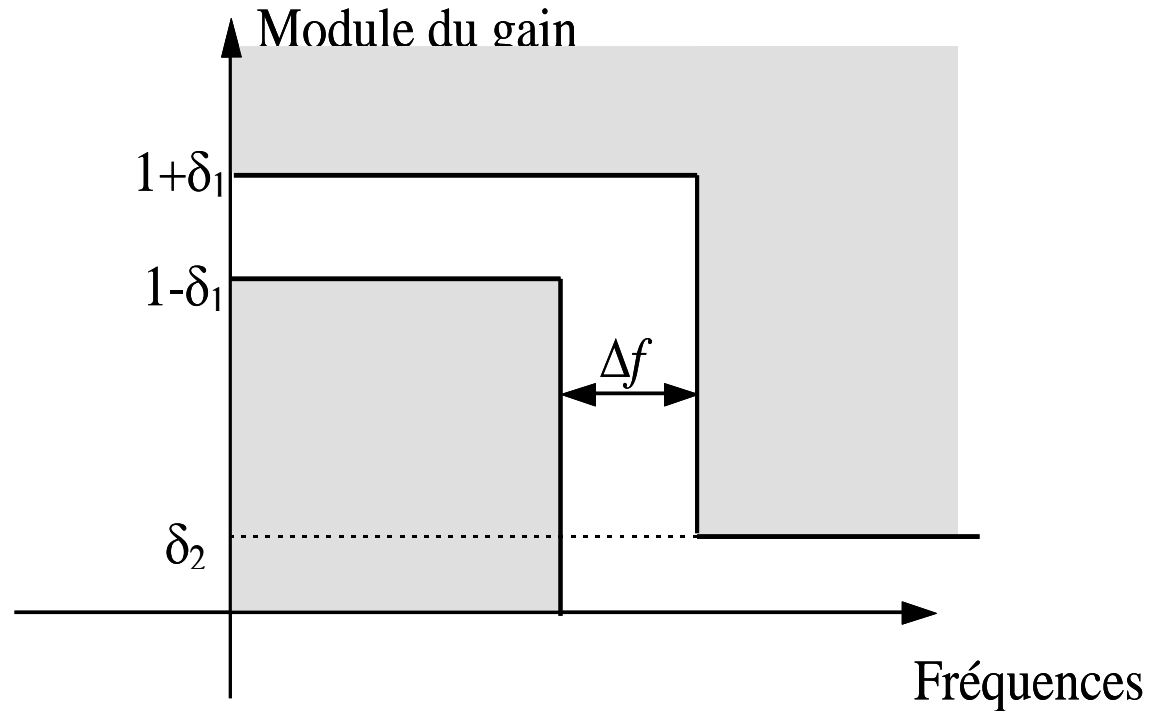
Type III: Pas de passe-bas ni de passe-haut

Type IV: Pas de filtre passe-bas



## D-2 Filtres RIF à phase linéaire

- Ordre des filtres RIF Formule empirique

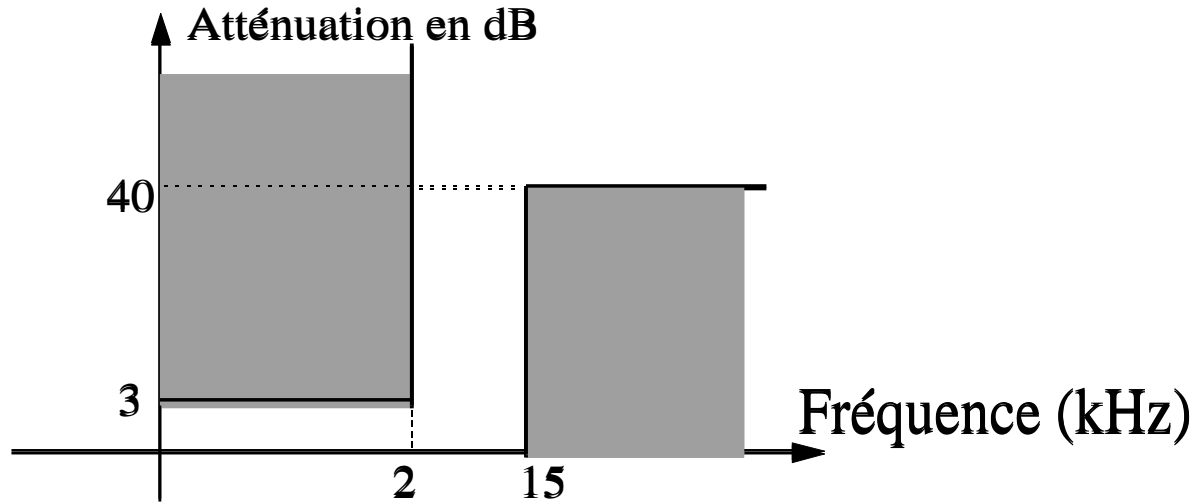


Ordre du filtre RIF

$$M \approx \frac{2}{3} \log_{10} \left( \frac{1}{10 \delta_1 \delta_2} \right) \frac{F_e}{\Delta f}$$

## D-3 Calcul des filtres RIF: Exemple

- ▶ Exemple (voir exemple pour les filtres RII)



$$20 \log_{10} \left( \frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right) = 3dB$$

$$20 \log_{10} (\delta_2) = -40dB$$

$$\delta_1 = 0,171$$

$$\delta_2 = 0,01$$

$$\Delta f = 13000 \text{ Hz}$$

$$F_e = 50 \text{ kHz.}$$

Soit  $M=4,5$

On testera  $M=4$  et  $M=5$  (filtres à 5 et 6 coefficients)

## D-3 Calcul des filtres FIR: Exemple

- ▶ Avec MATLAB / fonction `remez`

filtre de type I, 5 coefficients

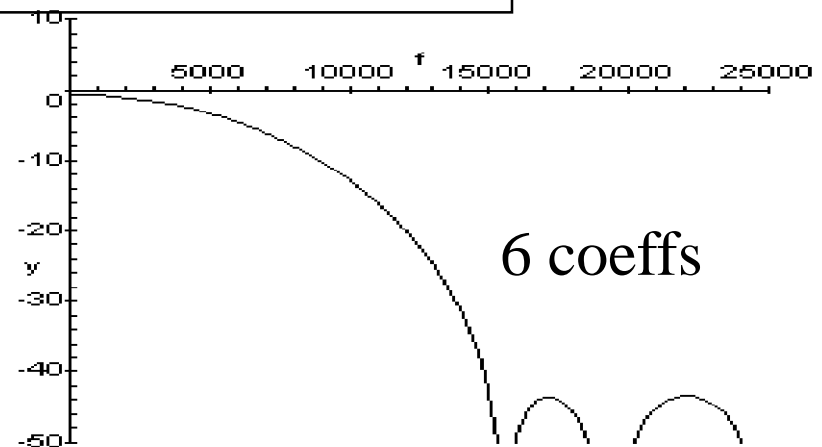
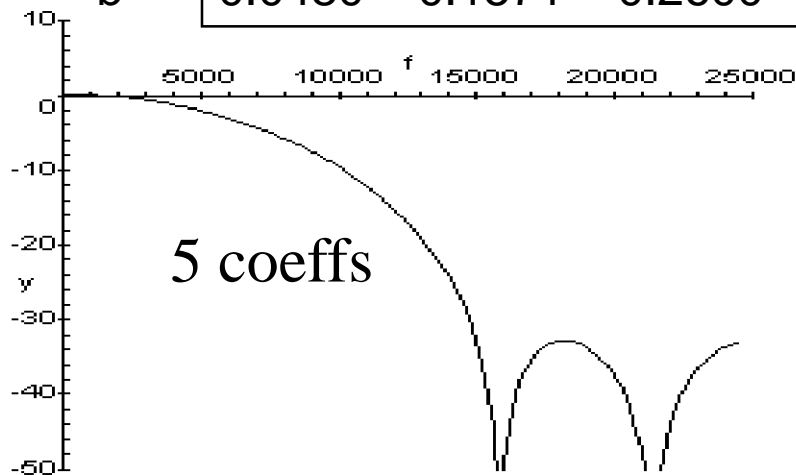
```
b=remez(4,[0 2000/25000 15000/25000 1],[1 1 0 0],[1 17])
```

```
b = 0.0697 0.1824 0.2420 0.1824 0.0697
```

filtre de type II (**pas**-bas possible) 6 coefficients

```
b=remez(5,[0 2000/25000 15000/25000 1],[1 1 0 0],[1 17])
```

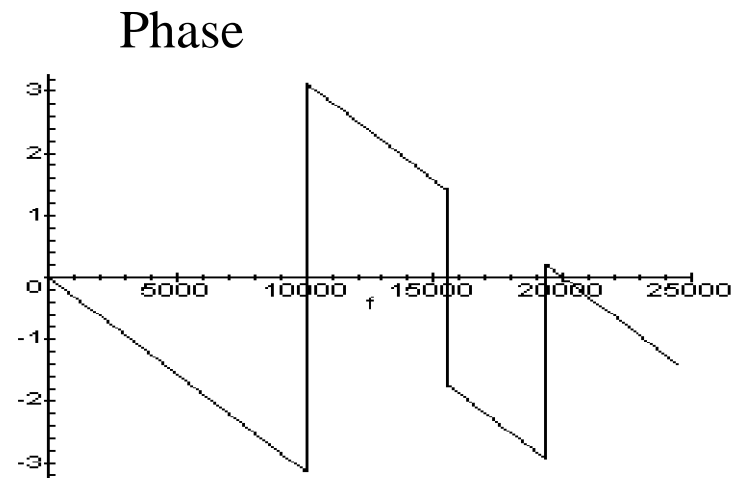
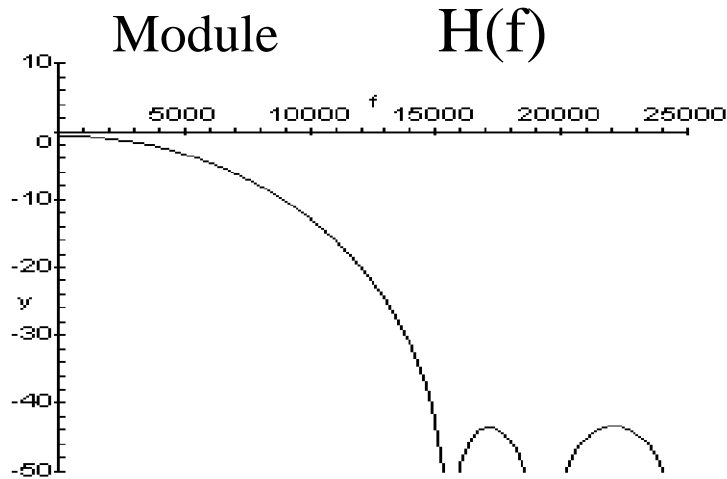
```
b = 0.0480 0.1571 0.2600 0.2600 0.1571 0.0480
```



## D-3 Calcul des filtres FIR: Exemple

► On choisit le filtre à 6 coefficients

0.0480 0.1571 0.2600 0.2600 0.1571 0.0480



Phase linéaire pente  $-5\pi/F_e$ , temps de propagation de groupe 2,5 échantillons

Comparaison avec le filtre RII trouvé auparavant

- Même complexité de calcul
- Phase linéaire pour le filtre RIF
- Stabilité inconditionnelle du filtre RIF

➔ Dans ce cas, il faut choisir le filtre RIF

---

**That's all folks**

---