



Département Génie Electrique

Traitement du signal, Filtrages Analogique et Numérique

Thomas Grenier

Lab. CREATIS – Univ. of Lyon, France

thomas.grenier@insa-lyon.fr

Sommaire

1. Généralités

2. Synthèse de filtres analogiques

- A. Synthèse des filtres analogiques
- B. Structures de filtres actifs
- C. Exemple complet de calcul d'un filtre
- D. Introduction aux problèmes de sensibilité

1. Synthèse de filtre numériques

2 – Filtrage Analogique

- A. Synthèse des filtres analogiques
 - B. Structures de filtres actifs
 - C. Exemple complet de calcul d'un filtre
 - D. Introduction aux problèmes de sensibilité
-
- Rolf Schaumann, "Design of Analog Filters", Oxford Series in Electrical and Computer Engineering, 2002
 - Les Thede, "Practical Analog and Digital Filter Design", Artech House, 2004 [chap 2 and 3]
 - Jim Karki, "Active Low-Pass Filter Design", Application report Texas Instrument (SLOA049B), 2002

2- Filtrage analogique

A- Synthèse des filtres analogiques

2-A Synthèse des filtres analogiques

- ▶ Obtenir le circuit électronique réalisant une fonction de transfert donnée

- ▶ Critères de choix
 - Domaine de fréquence
 - Coût, nombre de composants, précision
 - Stabilité
 - Sensibilité aux variations de valeurs des composants
 - Dynamique
 - Amplification nécessaire
 - Impédances d'entrée et de sortie

2-A Solution de filtres analogiques

▶ Filtres passifs

- LC, en HF, Q élevé difficile à obtenir en BF
- RC, pôles réels, pas de surtension donc pas de forte sélectivité
- Utilisation de composants spéciaux (céramique pour la RF)

▶ Filtres actifs

- Présence d'amplificateurs (AOPs, transistors)
- Utilisation en BF (limite de bande passante des composants)
- Source d'énergie nécessaire
- Dynamique limitée (saturation)
- Structures
 - Classique à amplificateur contre-réactionné : 1Hz-100MHz
 - Simulation de LC (NIC, Gyrateurs, integrateur.)
 - On chip continuous time active filter : 10Hz – 1GHz

▶ Autres filtres commutés

- Capacités commutés : 1Hz-10MHz
- Fonctionnement échantillonné (Discret LC) : 10Hz – 1GHz
- Structure distribuée : 100MHz – 100GHz

2- Filtrage analogique

B- Structures des filtres actifs

2-B Structures des filtres actifs

- ▶ Filtres RC actifs (pas d'inductance)
- ▶ $H(p)$: fraction de deux polynômes d'ordres N et M

$$H(p) = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_N p^N}{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_M p^M}$$

- ▶ Factorisation des polynômes

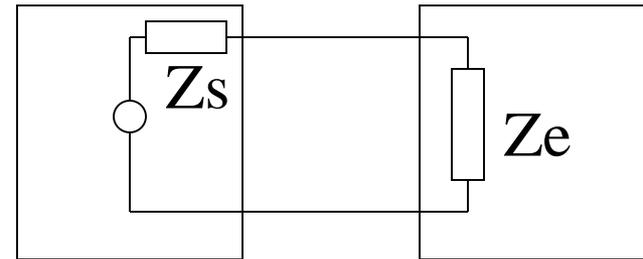
$$H(p) = \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (p - z_i)}{\prod_{j=0}^{M-1} (p - p_j)}$$

- ▶ Regroupement des pôles et zéros complexes conjugués en fonctions du second (et premier) ordre

$$H(p) = \prod_k \frac{b_{0k} + b_{1k} p + b_{2k} p^2}{a_{0k} + a_{1k} p + a_{2k} p^2} = \prod_k H_k(p)$$

2-B Structures des filtres actifs → cellule biquadratique

- ▶ $H_k(p)$: fraction de polynômes de degré 2 à coefficients réels
- ▶ Synthèse en cascade (voir cm4 - cours précédent)
Problèmes d'impédance d'entrée et de sortie des structures électroniques en cascade
- ▶ Filtres actifs en tension (cellule à transfert de tension)
 - impédances d'entrée forte
 - impédances de sortie faible
- ▶ Filtres actifs en courant
 - impédance d'entrée faible
 - impédance de sortie forte
- ▶ Filtres passifs
 - Adaptation d'impédance $Z_e=Z_s$
 - Transfert de puissance



2-B Structures biquadratiques

$$H(s) = \frac{as^2 + bs + c}{s^2 + ds + 1}$$

► Structure/cellule biquadratique

- valeurs de a,b, c : passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur (coupe-bande)

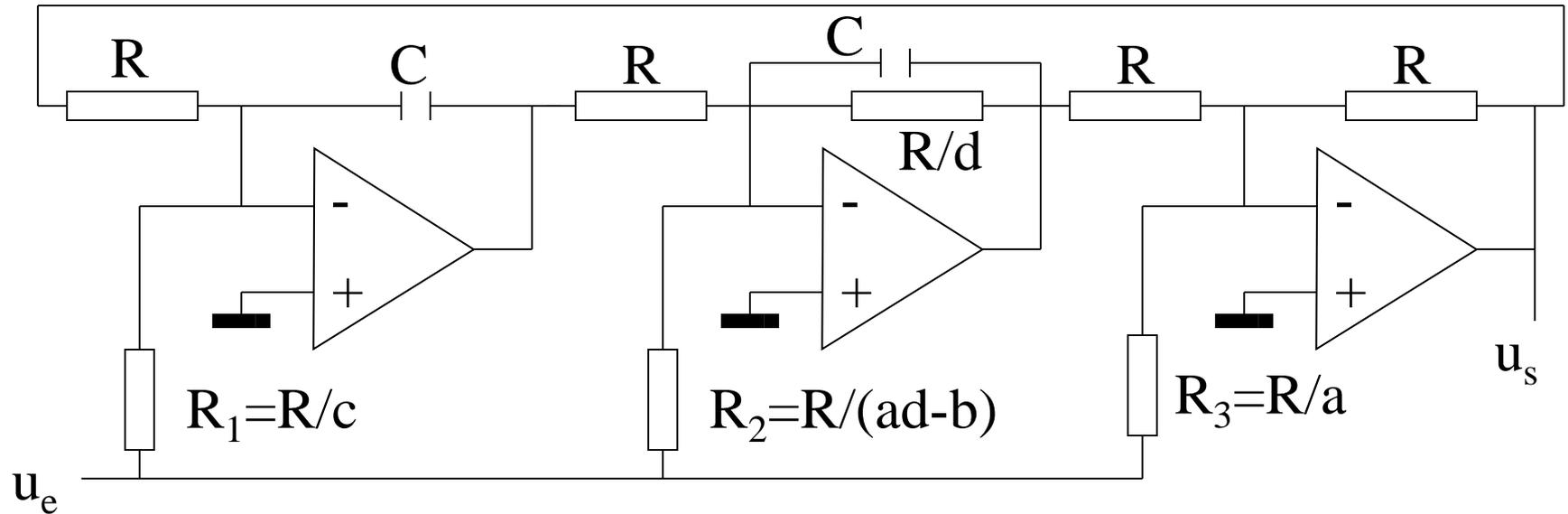
► Réalisation de la structure biquadratique

- Structures universelles
 - Passe-bas, passe-haut,... par choix/réglage des valeurs des composants et/ou choix de la sortie du montage
 - Delyannis-Friend, Fleisher-Tow, réseau à variable d'état...
- Structures à 1 amplificateur (opérationnel)
 - A contre-réaction simple
 - de Rausch à contre-réactions multiples
 - de Sallen et Key, ou à source contrôlée
 - à convertisseur d'impédance (NIC) (généralement deux amplificateurs)
- Simulation d'inductance, gyrateur
- etc....(autres solutions très spécifiques « *High Q cells* »)

2-B Structures biquadratiques universelles

► Exemple de cellule universelle ordre 2

- simulation de $H(s)$ par intégration



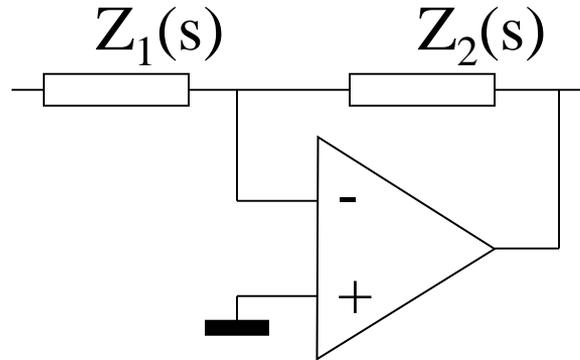
- $a, c, d > 0$
- $ad > b$ (sauf pour passe-bande)
- Passe-bas: $a=b=0$, enlever R_2 et R_3
- Passe-haut: $b=c=0$, enlever R_1
- Passe-bande: $a=c=0$, enlever R_1 et R_3
et $R_2 = R/b$

$$\frac{u_s(s)}{u_e(s)} = -\frac{as^2 + bs + c}{s^2 + ds + 1}$$

$$\frac{u_s(s)}{u_e(s)} = \frac{bs}{s^2 + ds + 1}$$

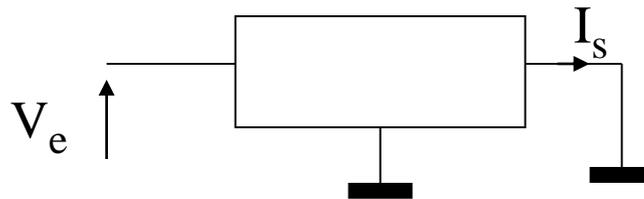
2-B Structures à contre réaction

► Structure à contre-réaction simple



$$H(s) = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

- Z_1 et Z_2 quadripôles complexes définis par leur trans-résistance (I_s/V_e) en sortie court-circuitée



$$Z(s) = \frac{V_e(s)}{I_s(s)}$$

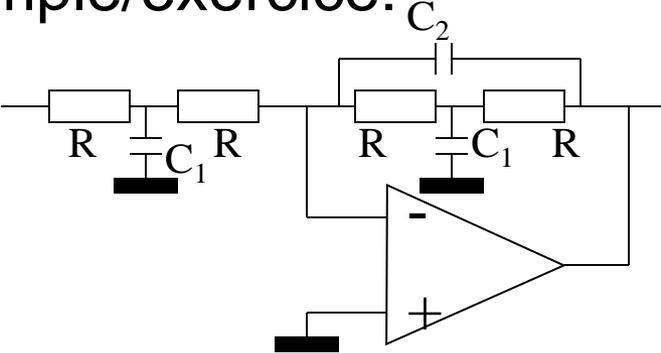
- Sur la borne - de l'ampli-op (parfait), courant nul, donc:

$$I_s(s) \text{ pour } Z_1 = - I_s(s) \text{ pour } Z_2$$

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$$

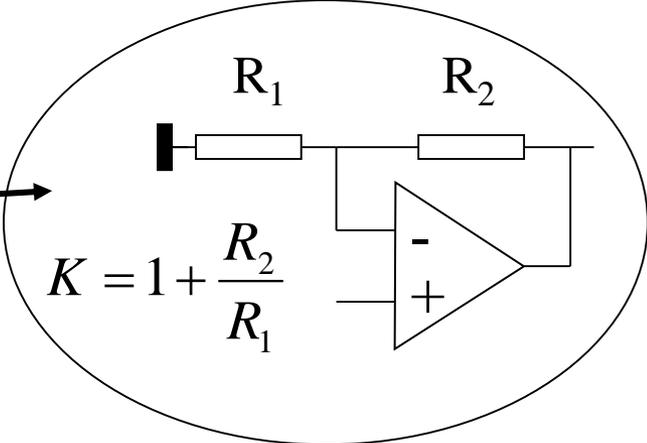
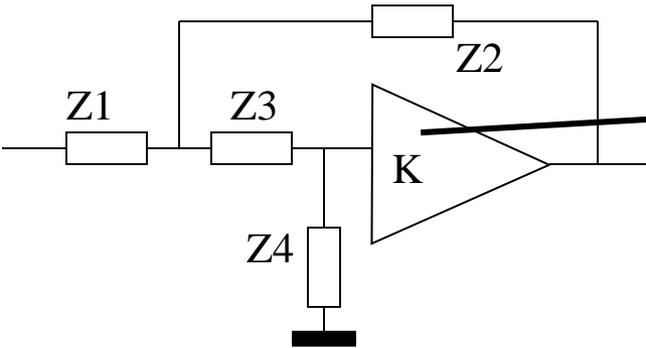
2-B Structures à contre réaction

▶ Exemple/exercice:



$$H(p) = -\frac{1}{1 + 2RC_2p + R^2C_1C_2p^2}$$

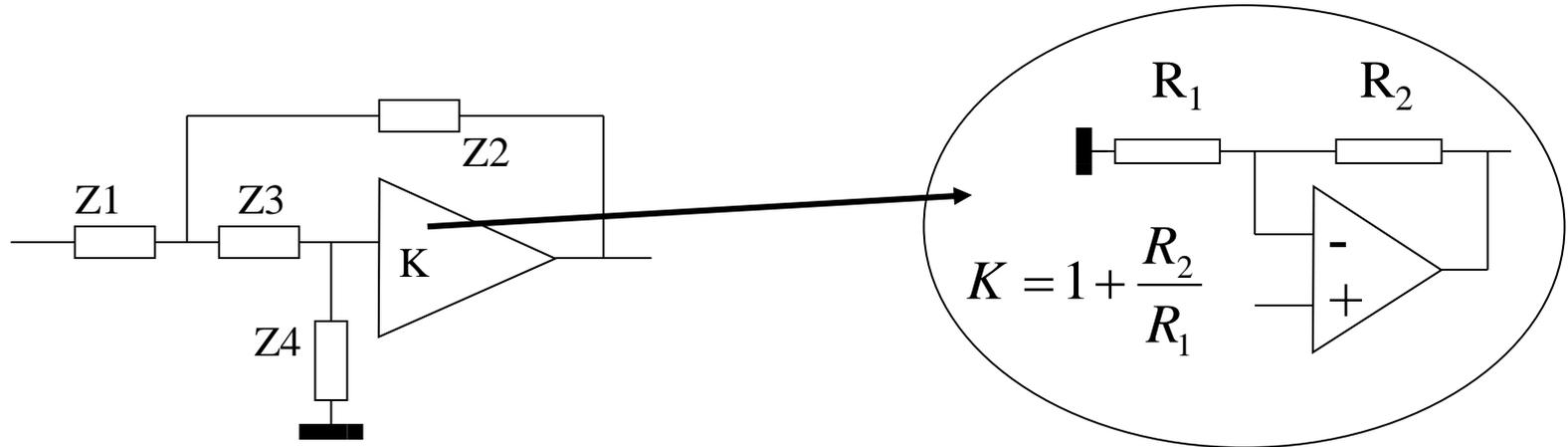
▶ Structure de Sallen-Key



$$H(p) = \frac{KZ_2Z_4}{Z_1(Z_3 + (1 - K)Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}$$

2-B Structures à contre réaction

► Structure de Sallen-Key

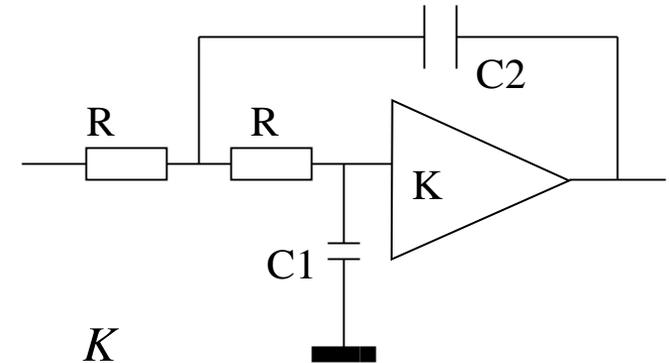


$$H(p) = \frac{KZ_2Z_4}{Z_1(Z_3 + (1-K)Z_4) + Z_2(Z_1 + Z_3 + Z_4)}$$

► Possibilité de réaliser tous les filtres d'ordre 2!

2-B Structures à contre réaction

► Filtre passe-bas avec Sallen-Key



$$H(s) = \frac{A}{1 + ds + s^2} = \frac{A}{1 + d \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{1 + pR(2C_1 + (1-K)C_2) + C_2C_1R^2 p^2}$$

$$A = K, \quad d = \frac{2C_1 + (1-K)C_2}{\sqrt{C_1C_2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$$

!!! Instabilité si d=0

- Cas particulier K=1 (amplificateur monté en suiveur)

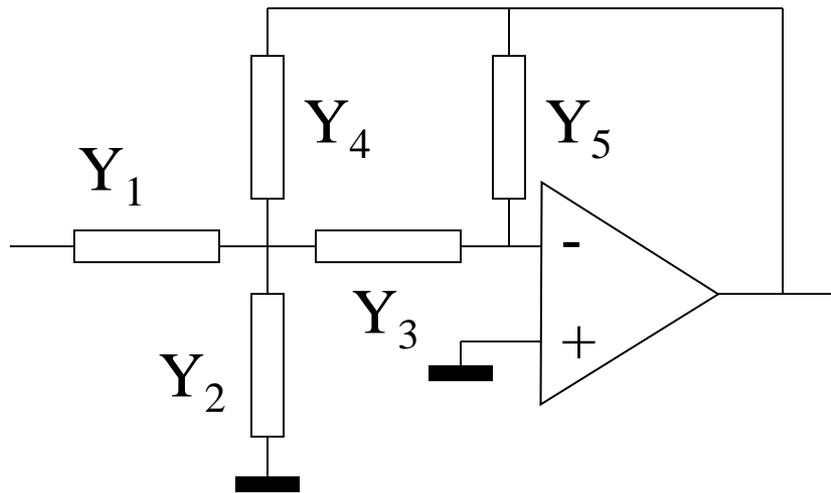
$$H(s) = \frac{A}{1 + ds + s^2} = \frac{A}{1 + d \frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{1 + p2RC_1 + C_2C_1R^2 p^2}$$

$$A = 1, \quad d = 2\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}, \quad \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}$$

2-B Structures à contre réaction

► Contre réactions multiple: Structure de Rauch

Admittances : $Y_i = 1/Z_i$



$$H(p) = - \frac{Y_1 Y_3}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) Y_5 + Y_3 Y_4}$$

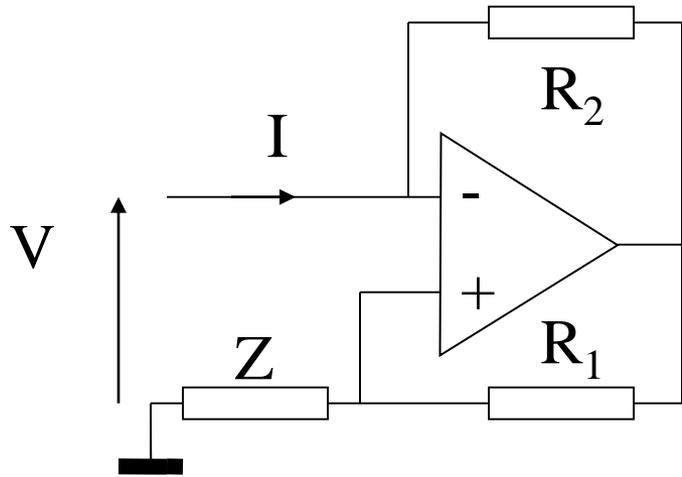
ex: $Y_1 = 1/R_1, Y_2 = C_2 p, Y_3 = 1/R_3, Y_4 = 1/R_2, Y_5 = C_1 p$

- Passe-bas

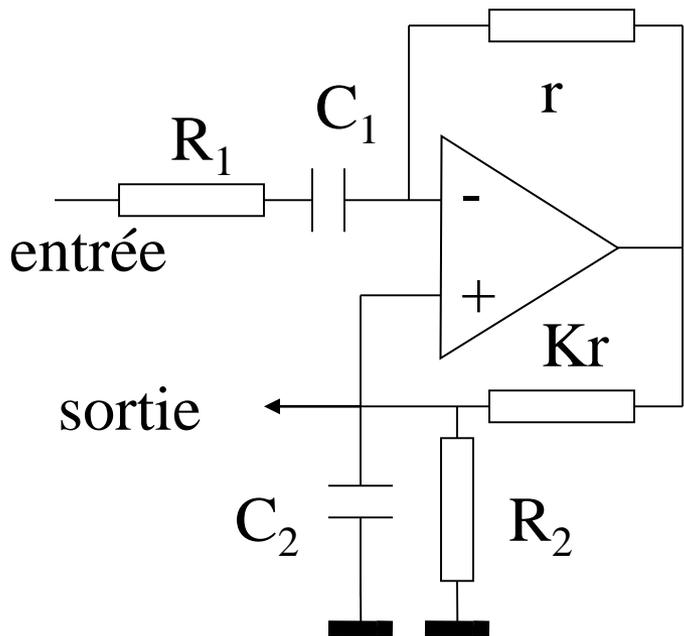
$$H(p) = - \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + p C_1 \left(\frac{R_2 R_3}{R_1} + R_2 + R_3 \right) + p^2 C_1 C_2 R_2 R_3}$$

2-B Structures à contre réaction

► Convertisseur d'impédance négative (NIC)



$$Z_i = \frac{V}{I} = -\frac{R_2}{R_1} Z$$



Ex: Passe-bande

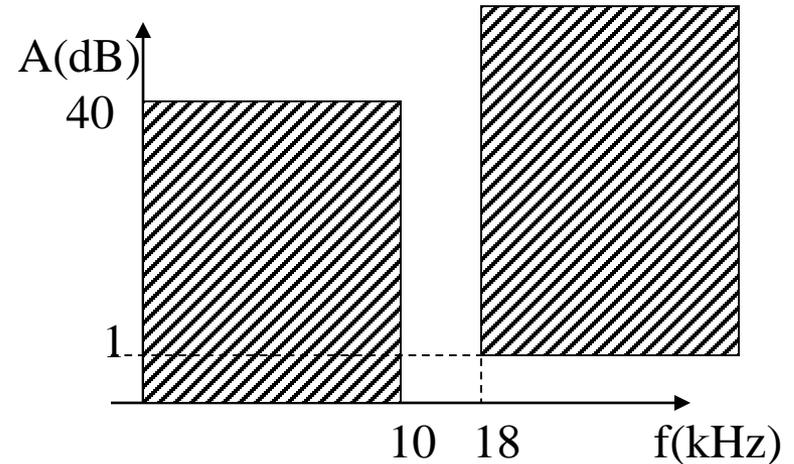
$$H(p) = \frac{1}{K} \frac{pR_2C_1}{1 + p(R_1C_1 + R_2C_2 - \frac{R_2C_1}{K}) + p^2R_1C_1R_2C_2}$$

2- Filtrage analogique

C- Un exemple complet

2-C Exemple complet

- Réalisation d'un filtre passe-haut Chebyshev



- Etapes:

1. normalisation
2. (transposition passe-bas)
3. recherche $H(s)$, vérification (tables, abaqués, logiciel...)
4. factorisation, pôles-zéros, organisation en cellules du second ordre
5. (transposition passe-haut)
6. dé-normalisation
7. choix structure électronique, calcul des composants
8. test,...

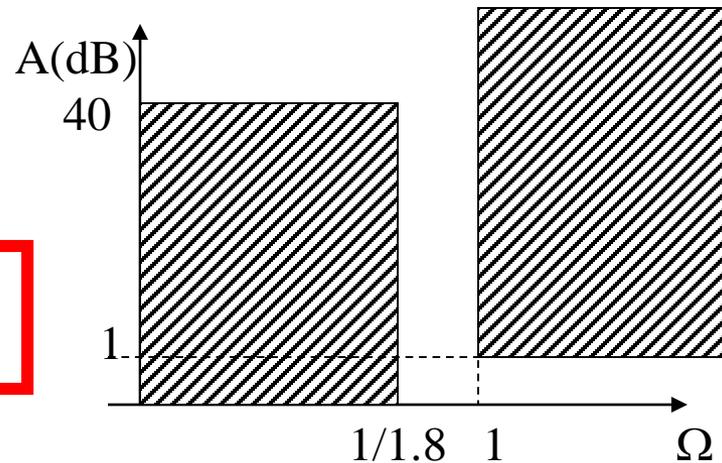
2-C Exemple complet

1. Normalisation

- Choix de la fréquence de normalisation f_0 ?
- Attention aux propriétés de la fonction d'approximation choisie et d'une éventuelle marge par rapport au gabarit
- On choisit ici $f_0=18\text{kHz}$, avec une ondulation (Chebyshev) inférieure à 1dB, soit 0.5 dB, pour garder une marge sur le gabarit en limite et dans la bande passante

$$\Omega = \frac{f}{f_0}$$

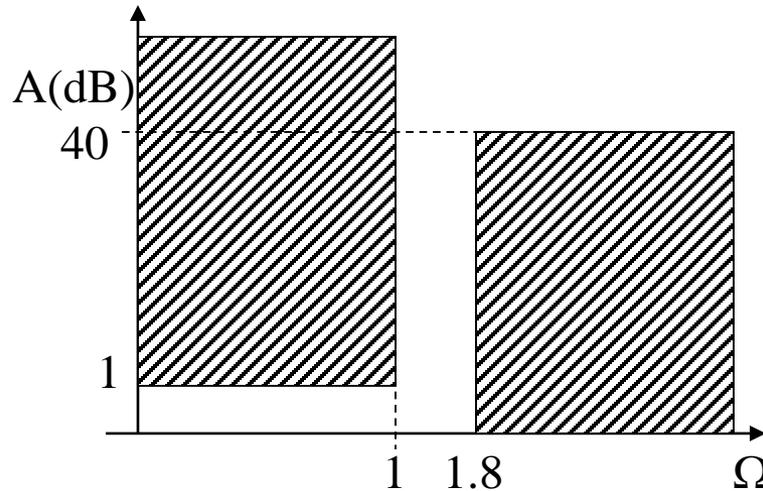
$$f_0 = 18\text{kHz}$$



2-C Exemple complet

2. Transposition (pas nécessaire si les outils permettent de travailler directement sur un passe-haut)

$$\Omega \rightarrow \frac{1}{\Omega}$$



3. Recherche de $H_{pb}(s)$

- Ordre ?

À titre indicatif, Butterworth donne un $n=8.98$, soit un ordre 9 ou 10

Matlab: Chebyshev type 1, ondulation 0.5 dB

```
>> cheb1ord(1, 1.8, 0.5, 40, 's') ----> n=6
```

2-C Exemple complet

3. Recherche de $H(s)$ (suite)

- Vérification (ex: Matlab)

```
>>[b,a]=cheby1(6,0.5,1,'s')
```

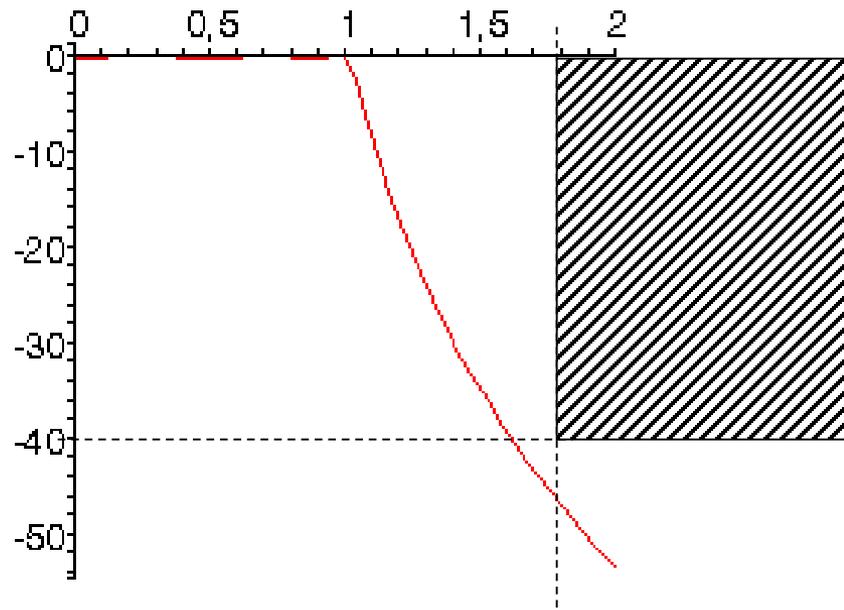
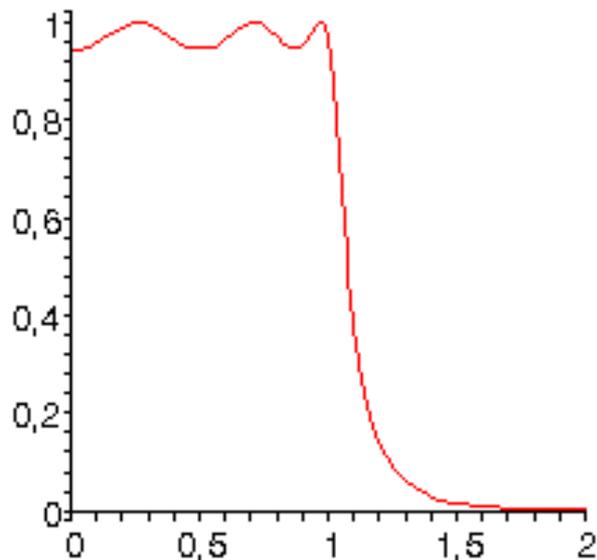
```
b = 0 0 0 0 0 0 0.0895
```

```
a = 1.0000 1.1592 2.1718 1.5898 1.1719 0.4324 0.0948
```

```
>> freqs(b,a)
```

---> observation de la courbe, zoom...

$$H_{pb}(s) = \frac{0.0895}{s^6 + 1.1592 s^5 + 2.1718 s^4 + 1.5898 s^3 + 1.1719 s^2 + 0.4324 s + 0.0948}$$



2-C Exemple complet

4. factorisation, pôles-zéros, organisation en cellules du second ordre (synthèse en cascade)

```
>>[z,p,k]=cheby1(6,0.5,1,'s')
```

```
z = [ ]
```

```
p =      -0.2898 + 0.2702i , -0.2898 - 0.2702i  
      -0.2121 + 0.7382i , -0.2121 - 0.7382i  
      -0.0777 + 1.0085i , -0.0777 - 1.0085i
```

```
k = 0.0895
```

```
>>zp2sos(z,p,k)
```

Second Order Section


$$H_{pb}(s) = \frac{0.0895}{(s^2 + s 0.5796 + 0.1570)(s^2 + s 0.4243 + 0.5900)(s^2 + s 0.1553 + 1.0230)}$$

5. Transposition passe-bas / passe-haut $s \rightarrow 1/s$

$$H(s) = \frac{s^6 0.0895}{(1 + s 0.5796 + s^2 0.1570)(1 + s 0.4243 + s^2 0.5900)(1 + s 0.1553 + s^2 1.0230)}$$

2-C Exemple complet

6. Dénormalisation


$$H(s) = \prod_{i=0}^2 H_i(s) = \prod_{i=0}^2 \frac{K_i s^2}{1 + b_i s + c_i s^2}$$
$$H(p) = \prod_{i=0}^2 \frac{K_i \frac{p^2}{\omega_0^2}}{1 + b_i \frac{p}{\omega_0} + c_i \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

$$K_0 K_1 K_2 = 0.0895$$

$$f_0 = 18 \text{kHz}$$

- Pulsation de résonance de la cellule i
- Coefficient de qualité $Q_i = 1/d_i$
- On choisit a priori

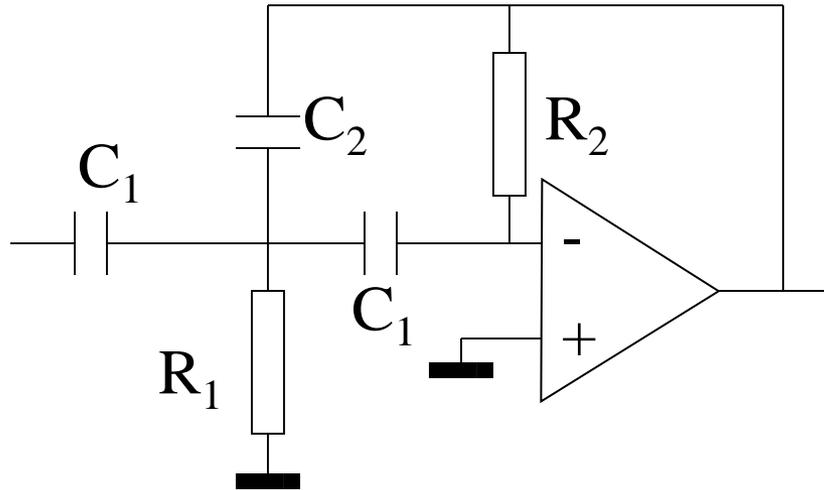
$$d_i = \frac{1}{Q_i} = \frac{b_i}{\sqrt{c_i}} \quad \omega_{ri} \approx \frac{\omega_0}{\sqrt{c_i}}$$

$$K_i = \sqrt[3]{\prod_{i=0}^2 K_i} = \sqrt[3]{0.0895} = 0.4473$$

2-C Exemple complet

7. Calcul des composants

- Structure de Rausch passe-haut



$$H(p) = -\frac{p^2 C_1^2 R_1 R_2}{1 + pR_1(2C_1 + C_2) + p^2 C_1 C_2 R_1 R_2}$$

- Par identification, pour la cellule i

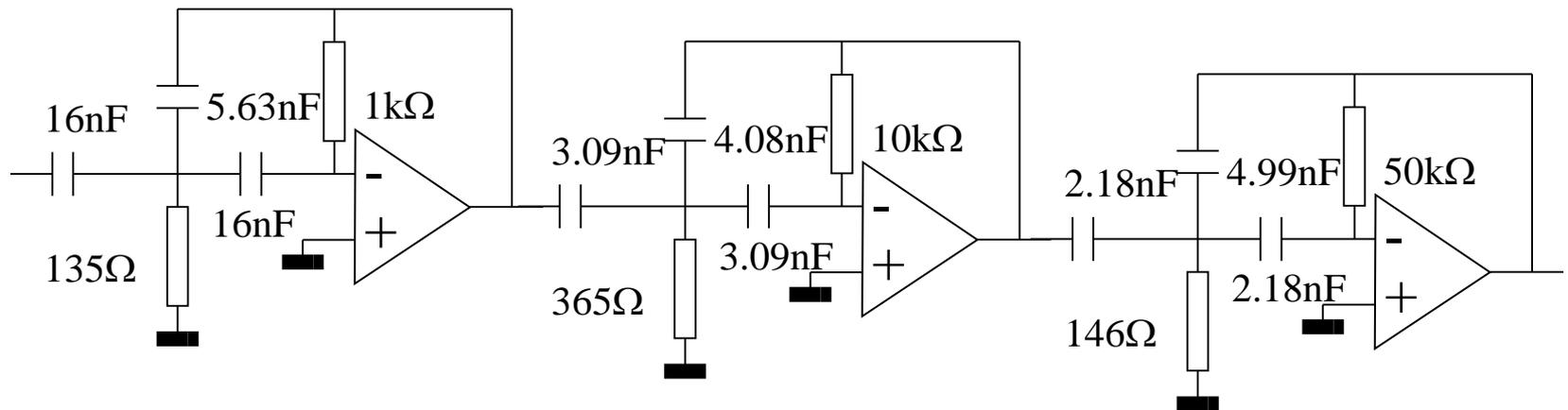
$$\frac{K_i}{\omega_0^2} = C_1^2 R_1 R_2 \quad \frac{b_i}{\omega_0} = R_1(2C_1 + C_2) \quad \frac{c_i}{\omega_0^2} = C_1 C_2 R_1 R_2$$

- Résolution: par exemple, choix de R2, calcul de R1, C1, C2
- Dans certains cas, on tombe sur des impossibilités qui nécessitent de revenir en arrière (choix R2, K_i , structure...)

2-C Exemple complet

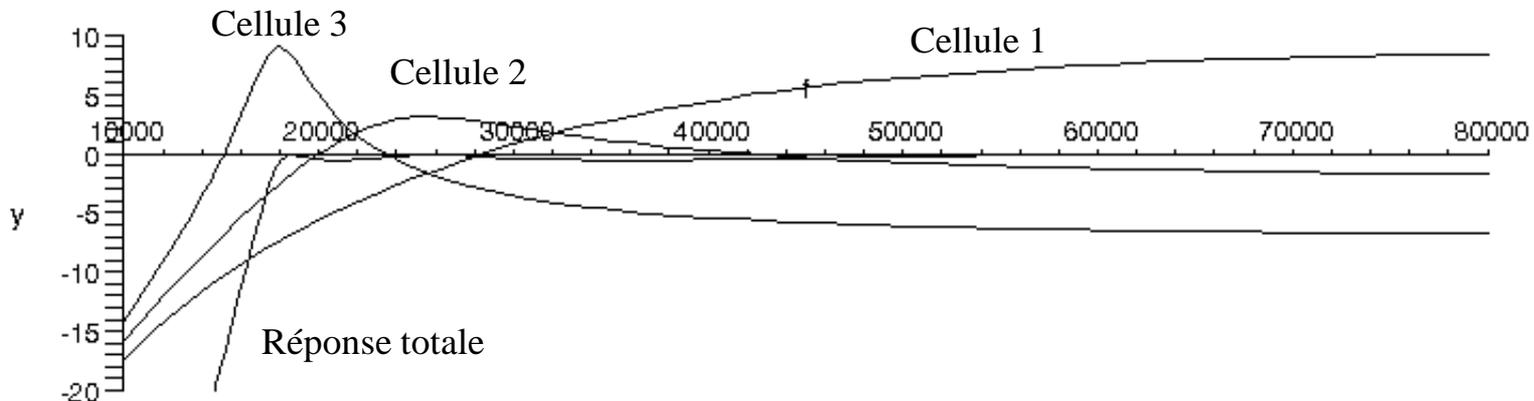
► Résultats

- Cellule 1: $b_i=0.5796$ $c_i=0.1570$ choix $R_2=1\text{k}\Omega$
 $R_1=135.8\Omega$ $C_1=16\text{nF}$ $C_2=5.63\text{nF}$
- Cellule 2: $b_i=0.4243$ $c_i=0.59$ choix $R_2=10\text{k}\Omega$
 $R_1=365.3\Omega$ $C_1=3.09\text{nF}$ $C_2=4.08\text{nF}$
- Cellule 3: $b_i=0.1553$ $c_i=1.023$ choix $R_2=50\text{k}\Omega$
 $R_1=146.7\Omega$ $C_1=2.18\text{nF}$ $C_2=4.99\text{nF}$



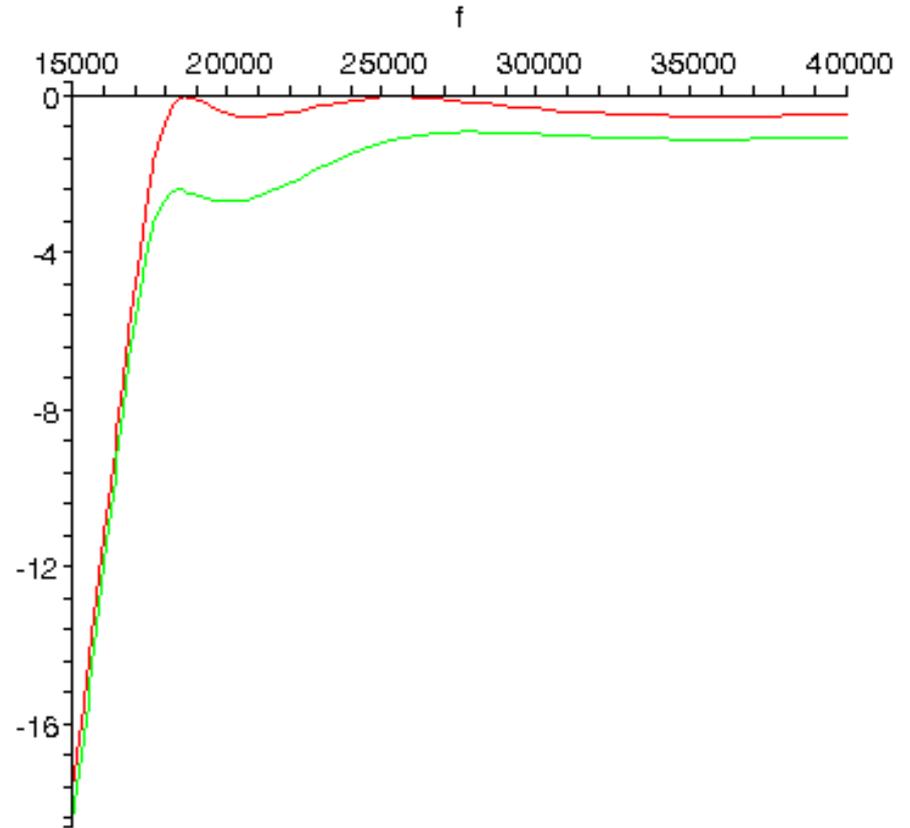
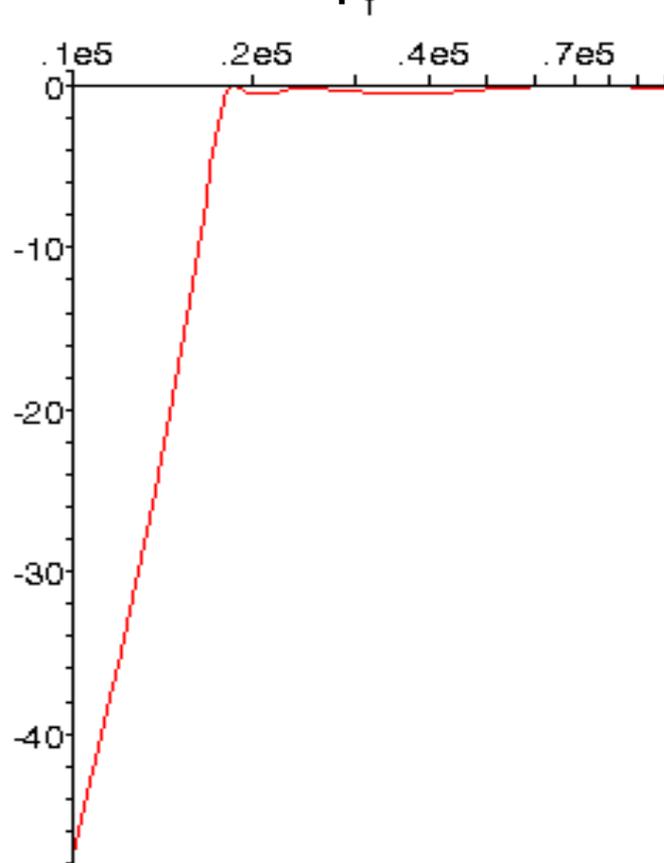
2-C Exemple complet

- ▶ Si les valeurs obtenues sont incohérentes (trop petites, trop grandes...), retour sur choix de R_2 , K_i , structure...
 - ▶ Problème de dynamique
 - Gain des cellules dans la bande passante K $\frac{K_i}{c_i} = \frac{C_1}{C_2}$
 - Cellule 1 : 2.8
 - Cellule 2 : 0.76
 - Cellule 3 : 0.436
 - Facteur de qualité (résonance) Q
 - Cellule 1 : 0.67
 - Cellule 2 : 1.83
 - Cellule 3 : 6.5
- Choix de l'ordre des cellules, modifications des K_i



2-C Exemple complet

► Vérification par simulation



► Câblage, test, problème de précision des composants

- <https://tools.analog.com/en/filterwizard/>
- <https://webench.ti.com/filter-design-tool>
- [FilterQuick ANSYS](#)
- <https://rf-tools.com/lc-filter/>

Exemple avec <https://tools.analog.com/en/filterwizard/>

High-Pass

Passband ?

Gain: dB

dB Hz

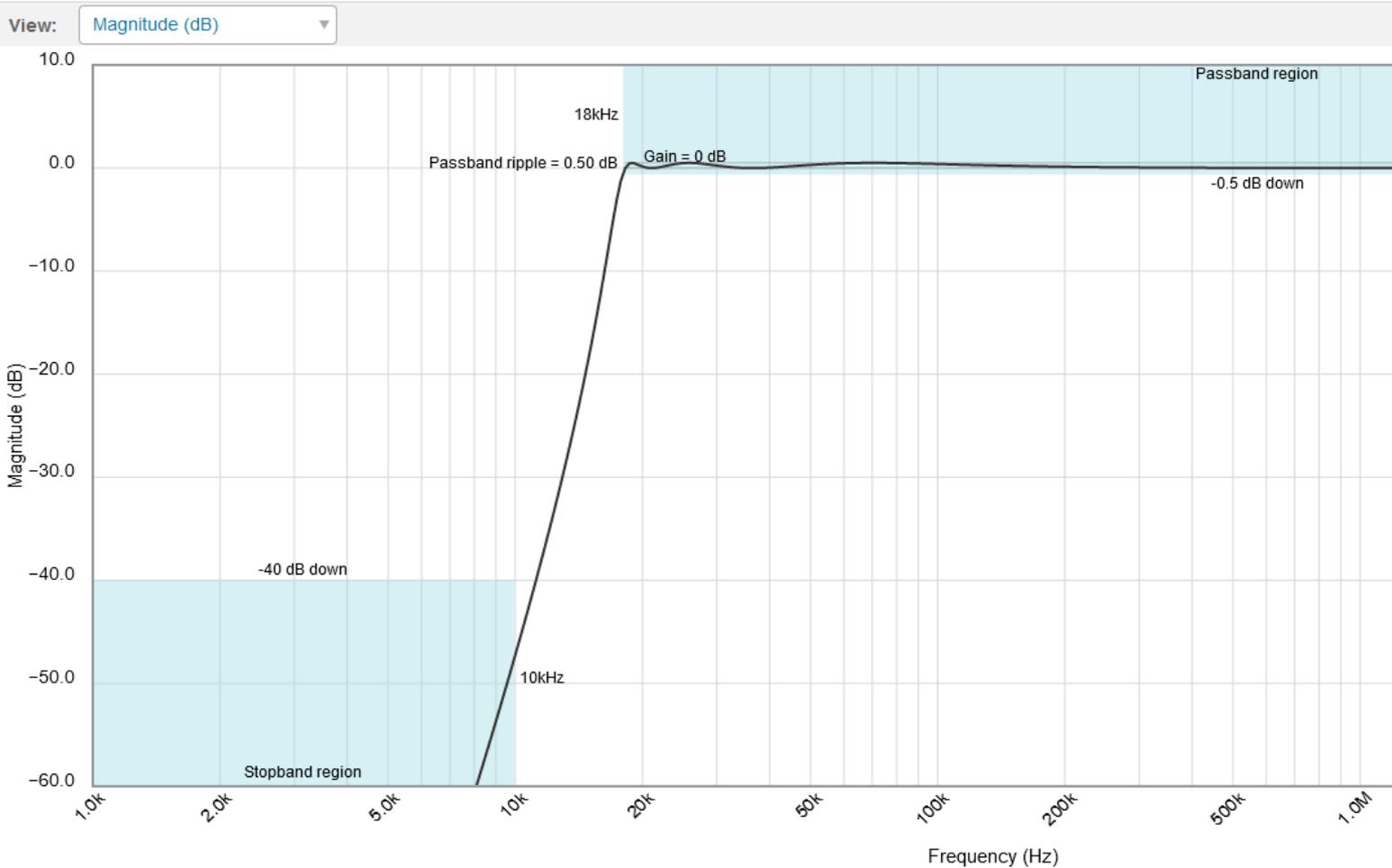
Stopband ?

dB Hz

Filter Response ?

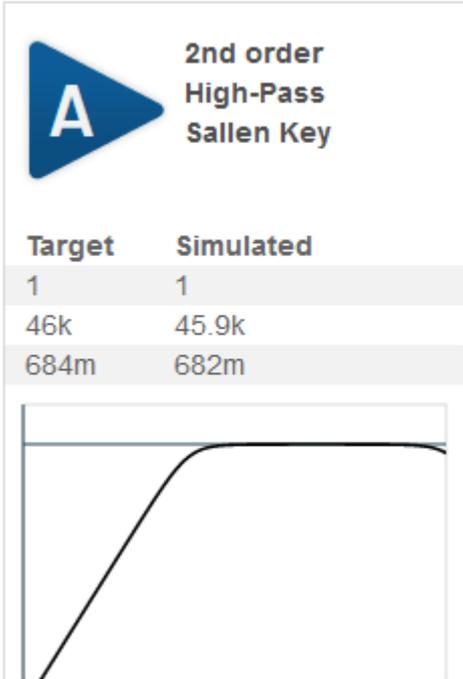
Fewest Stages Fastest Settling

6th order Chebyshev 0.50 dB (3 stages)

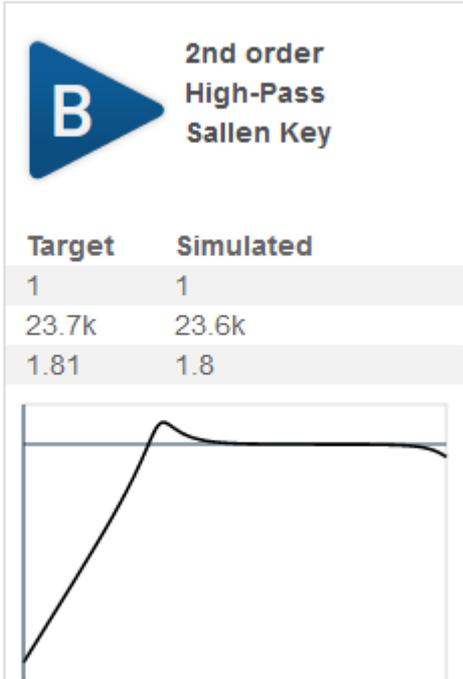


Exemple avec <https://tools.analog.com/en/filterwizard/>

Your filter requires 3 op amp stage(s) with the following characteristics



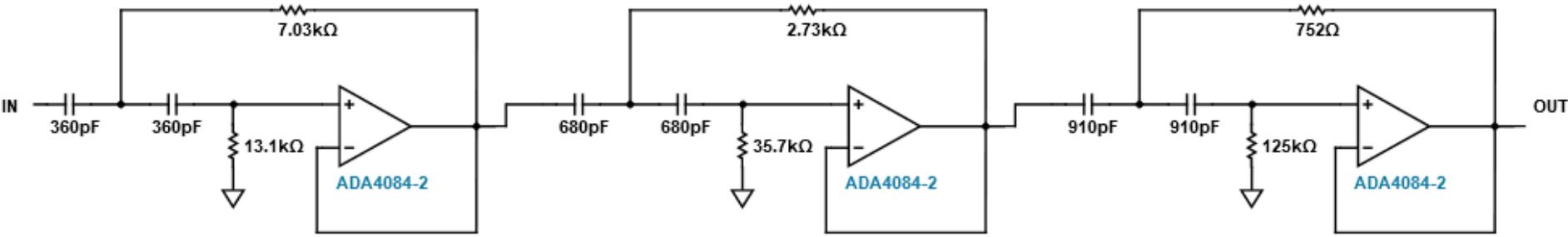
Stage A
2nd order High-Pass Sallen Key



Stage B
2nd order High-Pass Sallen Key



Stage C
2nd order High-Pass Sallen Key



Exemple avec <https://webench.ti.com/filter-design-tool/>

Specification ←

Passband ^

Gain (Ao) dB V/V

(0-60)

Frequency (Fp) Hz *

(0.1-10M)

Ripple (Rp) dB

(0-3)

* Cheby's passband is set at the final rolloff of its ripple. All others' passband are set at -3dB

Stopband ^

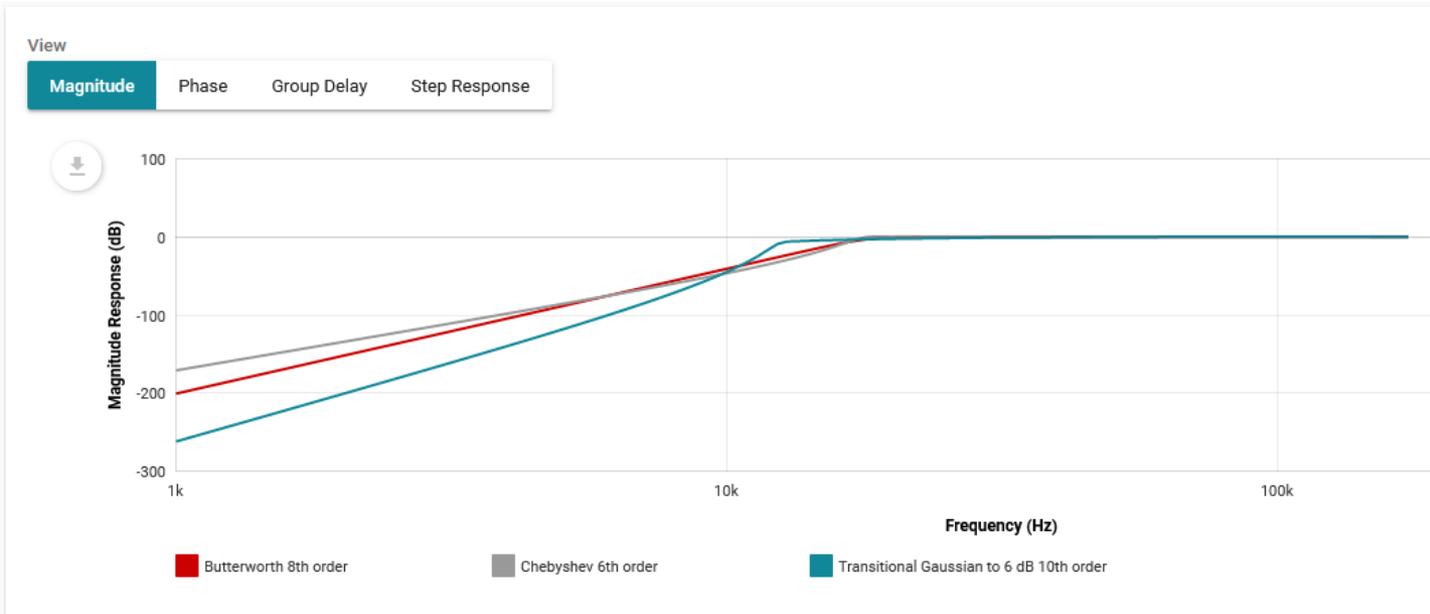
Filter order

Frequency (Fs) Hz

(0.1-1G)

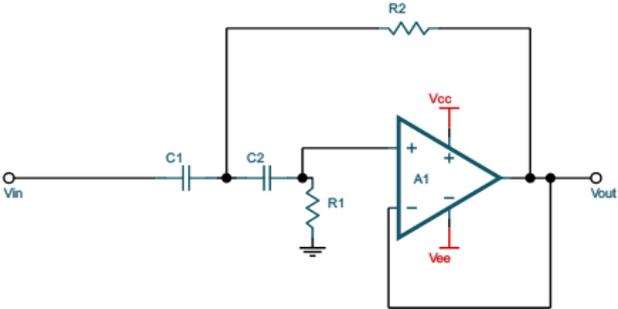
Attenuation (Asb) dB

(-120-0)



View	Filter Response	Order	No. of Stages	Max Q	Stopband Attenuation (dB)
<input checked="" type="checkbox"/>	Butterworth	8	4	2.563	-40.840
<input checked="" type="checkbox"/>	Chebyshev	6	3	6.511	-46.510
<input checked="" type="checkbox"/>	Transitional Gaussian to 6 dB	10	5	10.740	-44.940

Exemple avec <https://webench.ti.com/filter-design-tool/>



- > Second order highpass filter topology
- > Non-inverting gain
- > Unity Gain
- > Uses 4 passive components

Stage	Order	Topology	Gain (V/V)	Q	fp (Hz)	GBW Reqd (Hz)
1	2	Sallen-Key	1.000	0.684	45.43 k	3.106 M
2	2	Sallen-Key	1.000	1.810	23.434 k	4.242 M
3	2	Sallen-Key	1.000	6.511	17.797 k	11.587 M

FilterQuick ANSYS

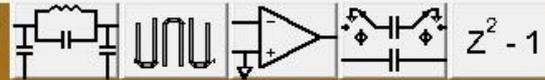
Ansys Nuhertz FilterSolutions 2022 R1 > Elliptic 7th Order, Parallel stages.ftr

— □ ×

File Zmatch Data Options Window Parts Advanced Help



small



$$Z^2 - 1$$

FilterQuick

FilterQuick Interface
Use Advanced Panel for Full Functionality

Band Classes Update Shape Types

Implementations

General Requirements	Value
Pass Band Ripple	.5 dB
Stop Band Attenuation	40 dB
Filter Gain	1
R Constant	10 KOhms
Op Amp DC Gain	Inf
Op Amp BW	Inf
Resistor Parasitic C	0 pF
Capacitor Q	Inf

High Pass Requirements	Value
Pass Band Frequency	18000
Stop Band Frequency	10000

Topologies:

- Thomas 1
- Thomas 2
- Akerberg
- Sallen & Key
- MFB
- Leap Frog
- Parallel
- GIC Biquad
- GIC Ladder

Add Tx Zeros

Force Order

Absorb 1st Order Stages

Linear Frequency Automate Min/Max Min Freq: 5 KHz Max Freq: 36 KHz

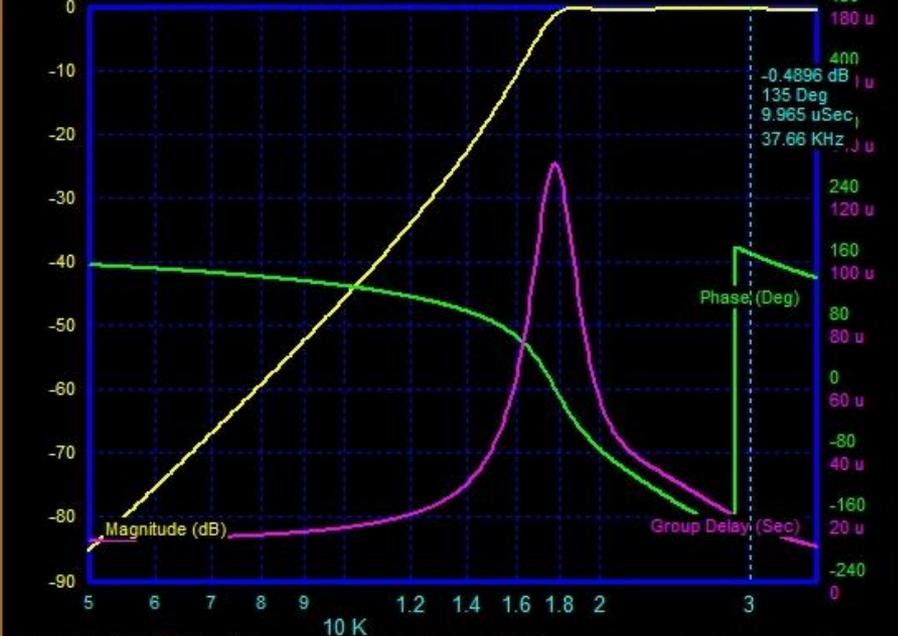
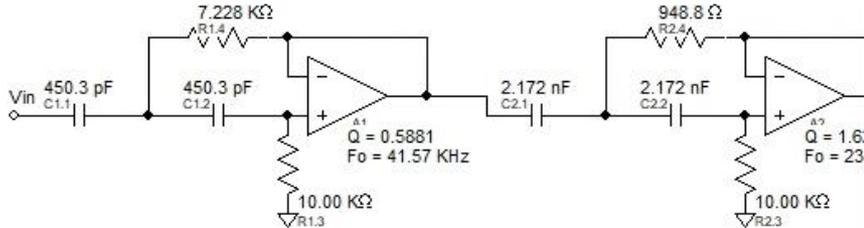
Print Copy NetList MCarlo Annotate Cap Compute Caps Select 4 Digs Fit Resis Select

Print Copy Limits Text Mag Phase Grp Delay dB Deg Polar

Export 6th Order High Pass Chebyshev I

Sallen & Key Circuit Frequency Response

Pass Band Frequency = 18.00 KHz
Pass Band Ripple = 0.5 dB



Tue Sep 20 21:56 2022

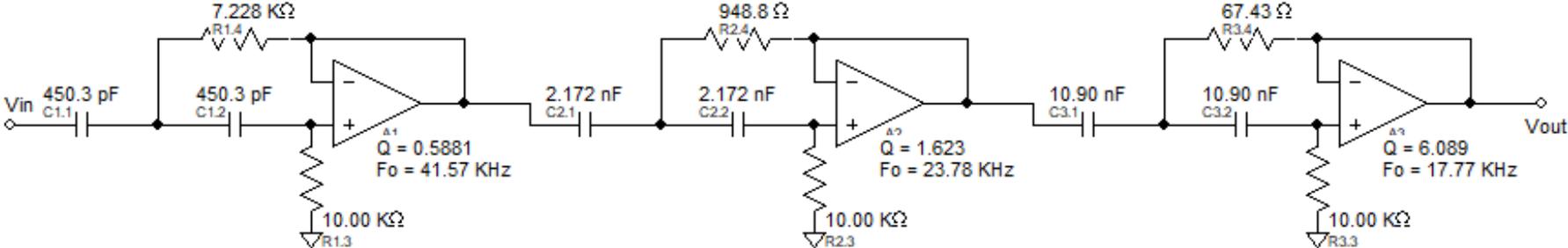
Tue Sep 20 21:56 2022

Hint: Use Mouse Keys to See Cursor Data
6th Order High Pass Chebyshev I

Frequency (Hz)

6th Order High Pass Chebyshev I

Pass Band Frequency = 18.00 KHz
Pass Band Ripple = 0.5 dB



Tue Sep 20 22:01 2022

2- Filtrage analogique

D- Problèmes de sensibilité, introduction

2-D Introduction aux problèmes de sensibilité

- ▶ Sensibilité d'un paramètre a (fréquence de coupure, gain, ...) en fonction d'un composant b (résistance, capacité...):

$$S_b^a = \frac{da}{db} \frac{b}{a}, \quad \Delta a = S_b^a \frac{a}{b} \Delta b$$

- ▶ En général: $S^Q \propto Q$
 - Plus Q est grand, une petite variation d'un composant entraînera une grande variation de Q .
 - Risque d'instabilité
 - Gabarit non respecté

2-D Introduction aux problèmes de sensibilité

- ▶ Exemple: Sallen-Key passe-bas

$$S_{C_1}^{\omega_0} = \frac{d\omega_0}{dC_1} \frac{C_1}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \quad \Rightarrow \quad S_{C_1}^{\omega_0} = -\frac{1}{2}$$

- Si C_1 augmente de 10%, ω_0 diminue de 5%

- ▶ Exercice: pour la structure de Sallen-Key passe-bas, montrer que:

$$S_K^d = -\frac{K}{d\omega_0 RC_1}$$

→ Que peut-on en déduire ?

→ Que devient l'expression pour $K=1$?

That's all folks

Outils de design de filtres analogiques

- ▶ <https://tools.analog.com/en/filterwizard/>
- ▶ <https://webench.ti.com/filter-design-tool>
- ▶ <https://rf-tools.com/lc-filter/>

- ▶ https://www.youtube.com/watch?v=hewTwm5P0Gg&ab_channel=ZachStar