



Département Génie Electrique

Traitement du signal, Filtrages Analogique et Numérique

Thomas Grenier

Lab. CREATIS – Univ. of Lyon, France

thomas.grenier@insa-lyon.fr

I. Généralités

A- Définitions, Méthodologie de calcul et classification des filtres

B- Modélisation des filtres

II. Synthèse de filtres analogiques

III. Synthèse de filtre numériques

I- Généralités

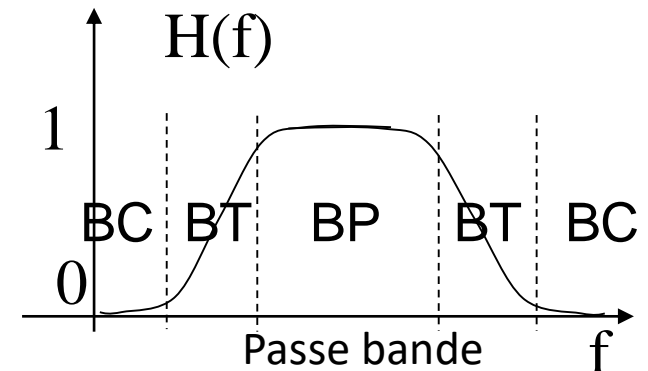
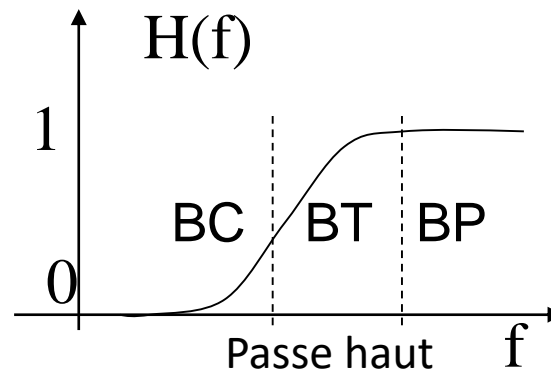
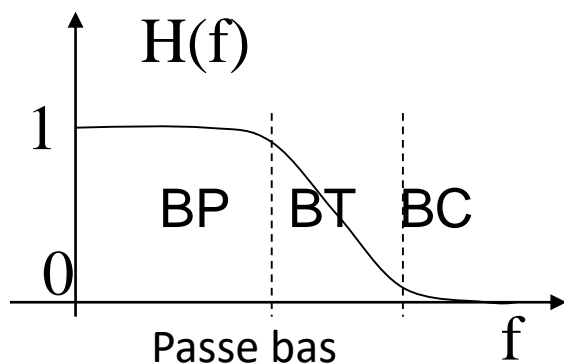
A- Définitions, Méthodologie et classification des filtres

A- Définitions

► Définition « filtrer »

- Séparer, modifier, éliminer, amplifier, atténuer ...
les composantes fréquentielles d'un signal en module et/ou en phase
- Intervalles de fréquences éliminées:
 - Bandes coupées BC
- Intervalles de fréquence conservées:
 - Bandes passantes BP
- Intervalles intermédiaires :
 - Bandes de transition BT

$$H(f) = V_s(f) / V_e(f)$$



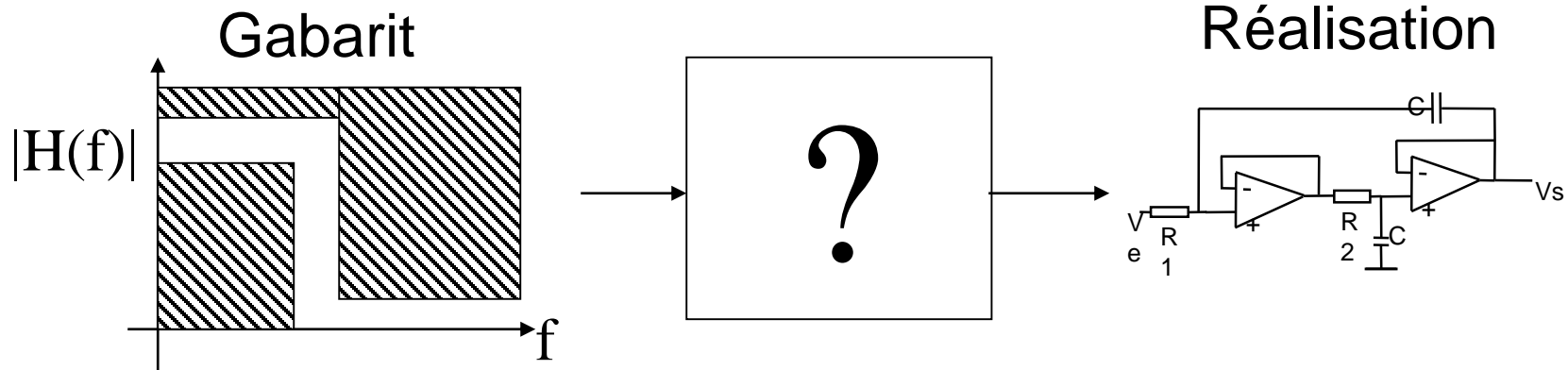
A- Définitions

► Synthèse de filtre

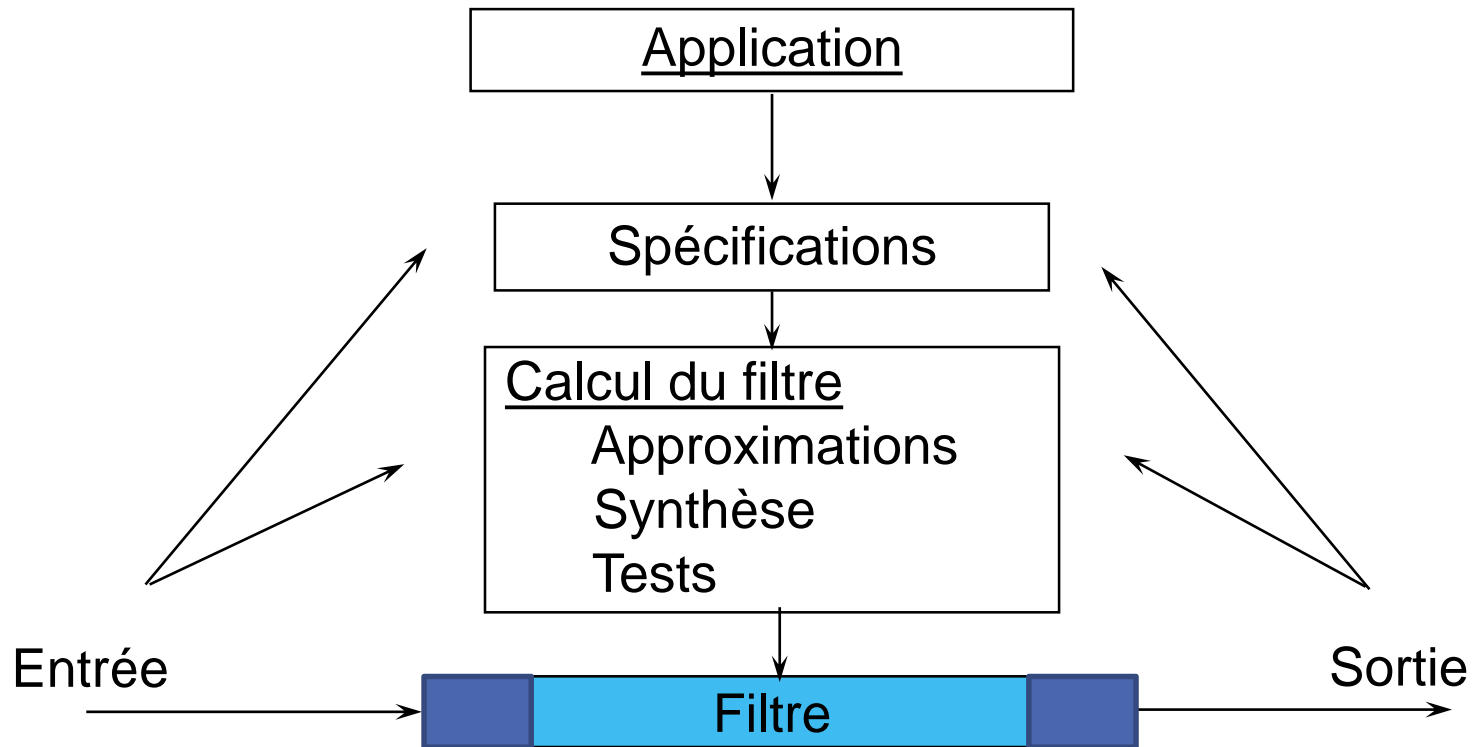
- En fonction d'une réponse fréquentielle souhaitée (gabarit), réaliser un circuit qui possède cette réponse

► Solutions techniques de

- Circuits (LC, RC..) passifs
- Filtres actifs utilisant des éléments amplificateurs
- Simulation de filtre LC avec composants actifs
Gyrateurs, NIC,...
- Filtres à capacités commutées
intermédiaires entre le numérique et l'analogique
- Filtres numériques



A- Méthodologie de calcul des filtres



► Application et ses contraintes

- Environnement : encombrements, consommation, alimentations disponibles, CEM, existant (mise à jour ou ajout), ...
- Signal : bruits, bande de fréquences, dynamique et précision des signaux E/S

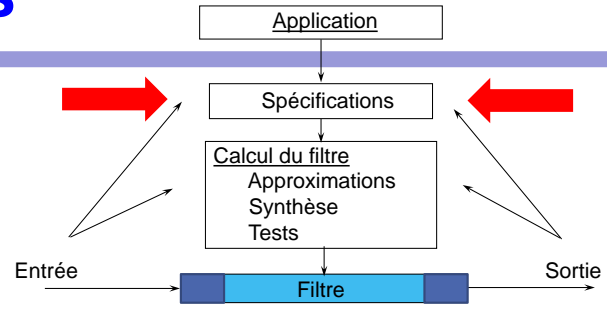
➔ En déduire les spécifications

A- Méthodologie de calcul des filtres

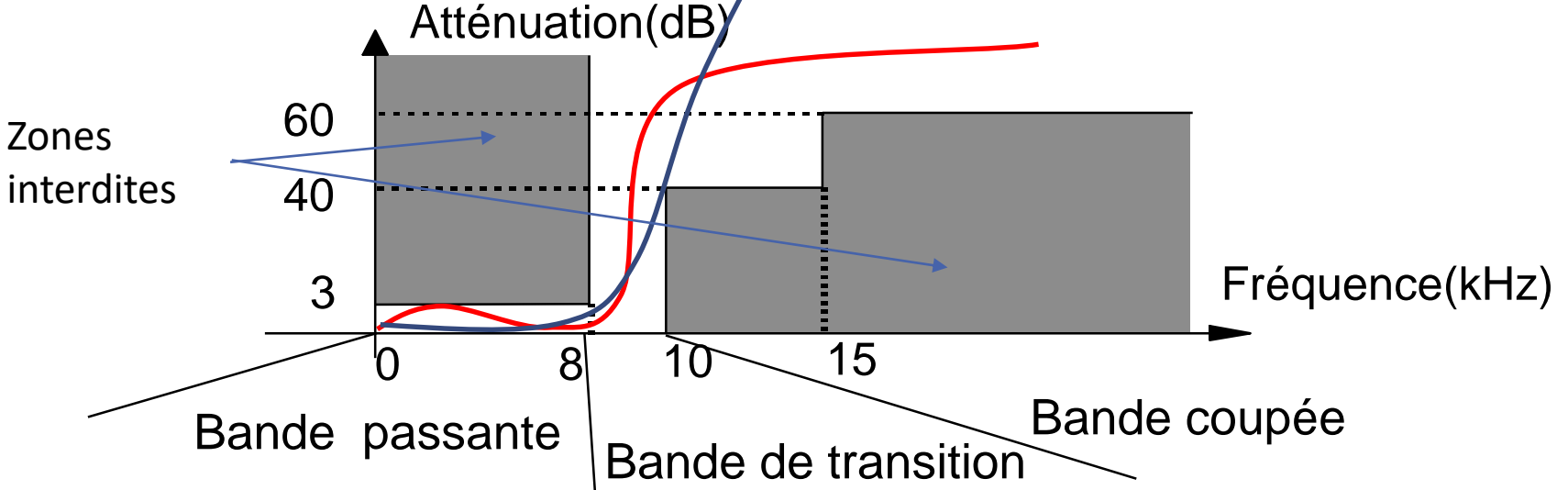
- ▶ Les étapes de la synthèse d'un filtre
 - Cahier des charges, spécifications de filtrage, gabarit
 - module, phase, réponse impulsionnelle, indicielle
 - Approximation: Calcul de la fonction de transfert respectant le gabarit
 - normalisation, transposition, optimisation, calcul de l'ordre....
 - Choix d'une structure électronique
 - Calcul des composants, calcul de sensibilité
 - Simulation du circuit
 - Câblage, test
- ▶ Il est souvent nécessaire de revenir en arrière pour obtenir un résultat satisfaisant
- ▶ Ces étapes sont réalisables +/- automatiquement par des outils logiciels (*utilisez les!*)

A- Méthodologie : Spécifications de filtres

- **Spécifications ou gabarit d'un filtre**
 - Module de la réponse en fréquence
 - Phase, temps de propagation de groupe
 - Réponse impulsionnelle ou indicielle



► **Gabarit**

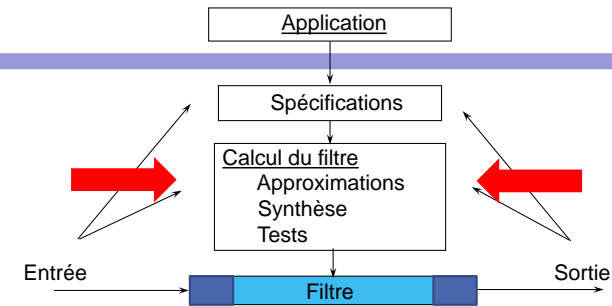


- Module de la réponse en fréquence
- Atténuation (inverse du gain)
- Filtre réel, donc module pair
- Simplification (ex: 60dB entre 10 et 15 kHz)
- Bande de transition INDISPENSABLE
- ➔ Mais augmente: Ordre du filtre, complexité de la réalisation, temps de calcul...

A- Méthodologie: Approximation

► Approximation

Spécifications \longrightarrow $H(p), H(z)$



Trouver une fonction de transfert réalisable dont la réponse (en fréquence, en temps et/ou en phase) respecte la spécification

Dimensionnement 1

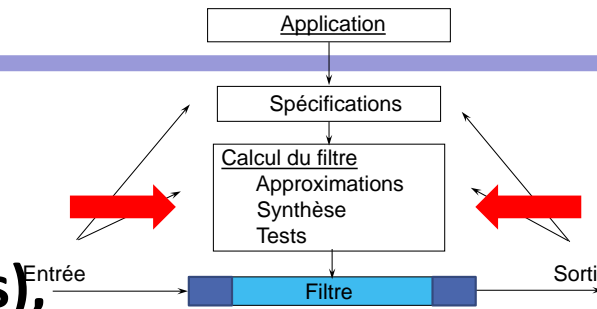
► Solutions

- Fonctions bien connues (tables, abaques)
 - Butterworth, Tchebychev (ou Chebyshev), Bessel, Legendre, Causer (filtres elliptiques)...
- Méthodes directes
 - Manuelles, par ordinateur
- Méthodes itératives (avec ordinateur)
 - Approximations optimales au sens d'un certain critère

A- Méthodologie : Synthèse de filtres

► Synthèse (réalisation)

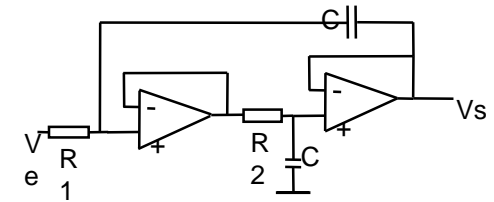
**Choisir la structure/forme et formats (nb de bits),
calculer les valeurs des composants/coefficients**



Dimensionnement 2

► Différentes solutions technologiques de réalisation

- Analogique
 - Filtres passifs
 - Filtres actifs (Sallen&Key, NIC...)
- Numérique
 - Circuits numériques spécifiques
 - Programmation (μ P, μ C, DSP, GPU, ...)
 - FIR, IIR, récursif, non récursif, en cascade, en parallèle, en treillis...
- Mixte
 - Capacités commutées

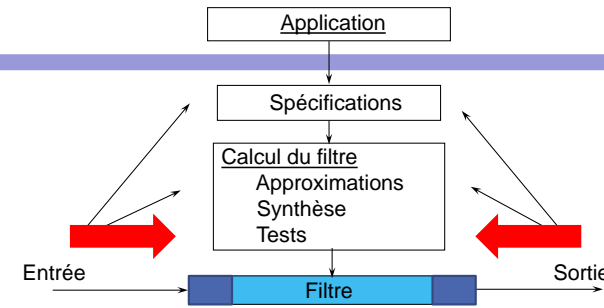


► Approximation et synthèse sont parfois intimement liées.

A- Méthodologie : Tests

► Tests

Vérifier que le gabarit et les spécifications sont respectés.



... La réalisation ne respecte pas toujours l'approximation et les spécifications

- Produit Gain-bande des AOP, séries des composants passifs
→ Réglages (analogique, coûteux) ou prise en compte théorique (simulateurs)
- Retour en arrière
 - Modification des spécifications (!)
 - Utilisation d'une autre approximation
 - Changement de structure pour la réalisation
 - Optimisation des valeurs des composants (gamme de précision, valeurs « clés »).

→ Les spécifications ne doivent pas être trop strictes (marges tolérances) ou contradictoires

A- Classification des filtres

► Classification fréquentielle

- Passe-bas

Atténuation des hautes fréquences

- Passe-haut

Atténuation des basses fréquences

- Passe-bande

Atténuation des hautes et des basses fréquences

- Coupe-bande ou réjecteur

Atténuation d'une bande de fréquences intermédiaires

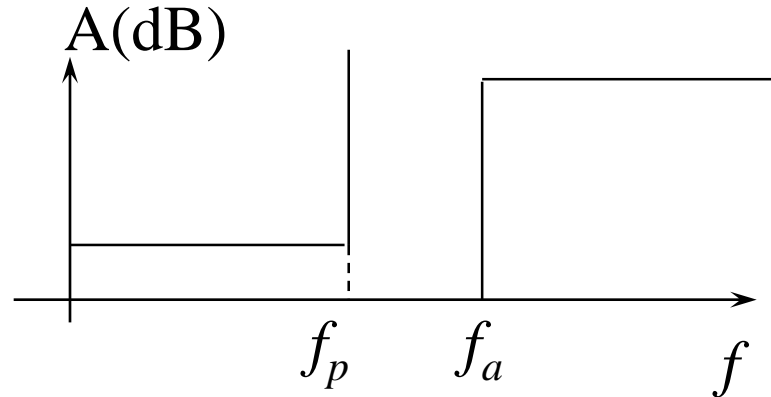
- **Autres:** Dérivateur, intégrateur, transformateur de Hilbert, réseau déphaseur (passe-tout)

A- Classification des filtres

► Sélectivité

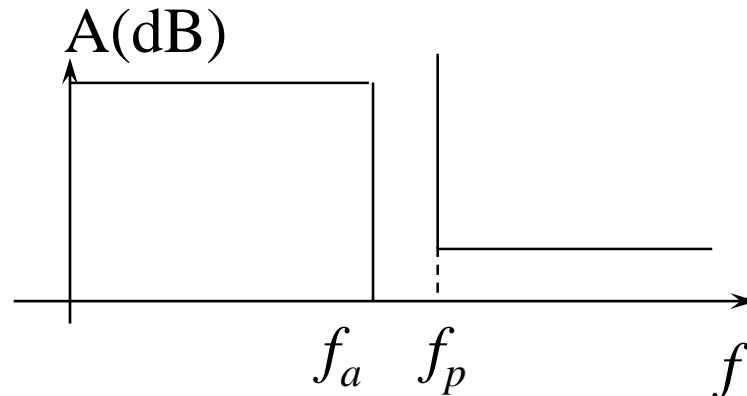
- Passe-bas

$$k = \frac{f_p}{f_a} < 1$$



- Passe-haut

$$k = \frac{f_a}{f_p} < 1$$



A- Classification des filtres

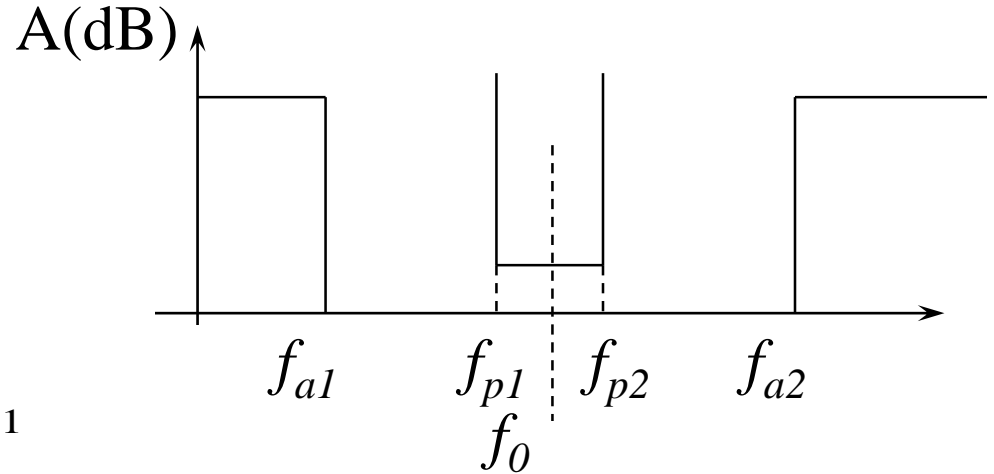
- **Passe-bande** (gabarit symétrique)

B est la bande passante relative (sans dimension)

$$k = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_{a2} - f_{a1}} < 1$$

$$B = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_0}$$

$$f_0^2 = f_{p2} f_{p1} = f_{a2} f_{a1}$$

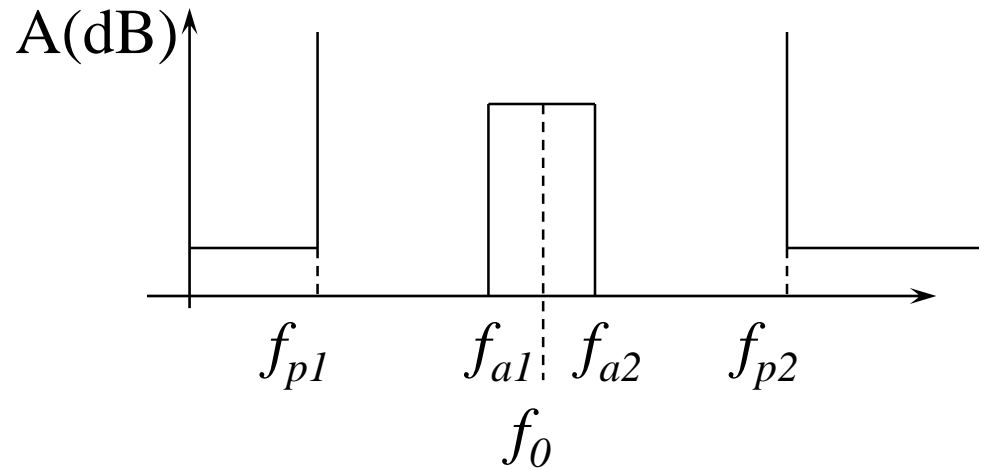


- **Coupe-Bande**

$$k = \frac{f_{a2} - f_{a1}}{f_{p2} - f_{p1}} < 1$$

$$B = \frac{f_{p2} - f_{p1}}{f_0}$$

$$f_0^2 = f_{p2} f_{p1} = f_{a2} f_{a1}$$

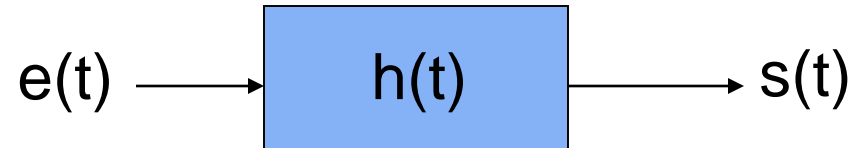


I- Généralités

B- Modélisation des filtres

B- Modélisation des filtres

- ▶ Filtre (linéaire) = système linéaire invariant
 - Fonction de transfert, gain en fréquence

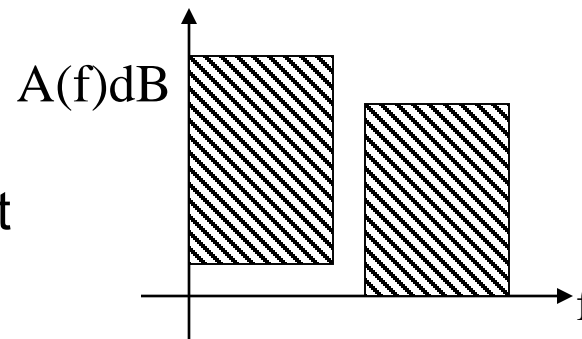


$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}, \quad p = j2\pi f, \quad H(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = |H(f)|e^{j\phi(f)}$$

- Affaiblissement

$$A(f) = \frac{E(f)}{S(f)} = \frac{1}{H(f)}, \quad A_{dB}(f) = \text{Aff}_{dB} = -\text{Gain}_{dB} = -20 \log(|H(f)|)$$

Gabarit
d'affaiblissement



B- Modélisation

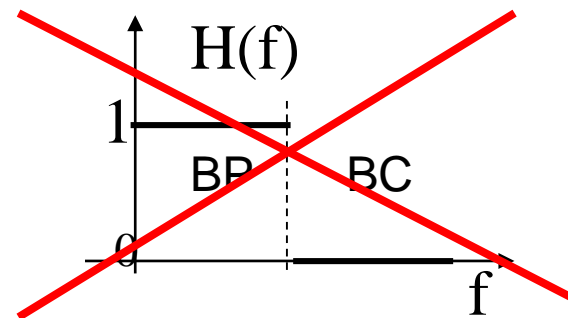
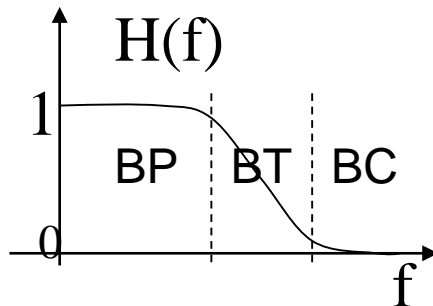
Propriétés de $H(p)$ et $H(f)$

- $H(p)$ fraction réelle de deux polynômes à coefficients réels
- Pôles et zéros de $H(p)$ sont réels ou par paires complexes conjuguées
- Pôles à partie réelle strictement négative (partie gauche du plan de Laplace) pour stabilité
- En analogique, degré du numérateur inférieur ou égal au degré du dénominateur, pas de contrainte en numérique
- Dans le contexte temporel, relation de Bayard-Bode valables, filtre causal réel



→ Réponse en fréquence continue, pas de passage « brusque » de la bande passante (BP) à la bande coupée (BC)

→ Présence obligatoire de bandes de transition (BT) « progressives »



(Relation de Bayard-Bode ou Kramers-Kronig)

- Un signal réel causal déterminé par sa partie paire ou impaire

$$f(x) = f_P(x) + f_I(x)$$

$$f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

signal causal $f(x) = 0$ pour $x < 0$

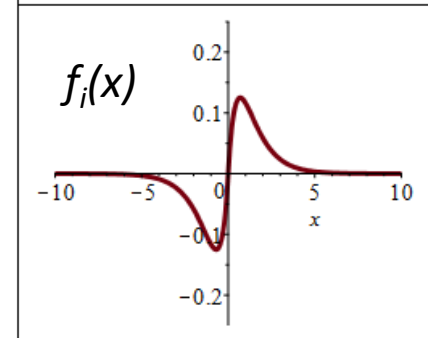
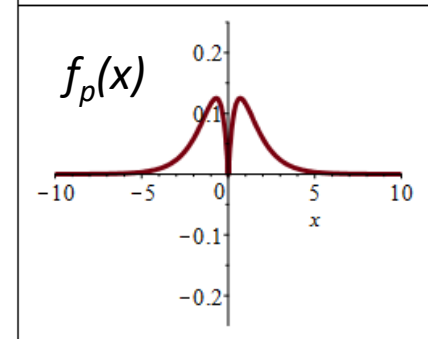
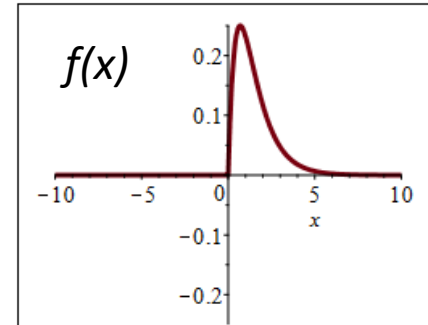
$$f_P(x) = \frac{f(x)}{2}, \quad f_I(x) = \frac{f(x)}{2} \text{ pour } x \geq 0$$

- Transformée de Fourier signal réel causal
partie réelle paire, partie imaginaire impaire

$$f(t) \xleftrightarrow{T.F.} \text{Re}(f) + j \text{Im}(f)$$

$$\text{Re}(f) = \int_0^{\infty} f(t) \cos(2\pi ft) dt, \quad \text{Im}(f) = -\int_0^{\infty} f(t) \sin(2\pi ft) dt$$

...par la formule d'Euler.



(Relation de Bayard-Bode ou Kramers-Kronig)

- ▶ TF inverse $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (Re(f) + j Im(f)) e^{j2\pi ft} df =$
- partie imaginaire nulle, donc...

$$\int_{-\infty}^{\infty} Re(f) \cos(2\pi ft) df - \int_{-\infty}^{\infty} Im(f) \sin(2\pi ft) df$$
$$= f_P(t) + f_I(t)$$

Re(f) paire et Im(f) impaire, donc intégrales (sur f) de fonctions paires, la première est paire et la deuxième impaire (sur t)

- ▶ Relation entre Re(f) et Im(f): Bayard-Bode

causal t>0

$$f(t) = 2f_P(t) = 2f_I(t) = 4 \int_0^{\infty} Re(f) \cos(2\pi ft) df = -4 \int_0^{\infty} Im(f) \sin(2\pi ft) df$$

- Relation entre module et phase
- Filtres spécifiés par le gain (module) en fréquence

$$Re(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y Im(y)}{f^2 - y^2} dy, \quad Im(f) = -\frac{2f}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(y)}{f^2 - y^2} dy$$

B- Modélisation : zéros/pôles et ordre d'un filtre

- ▶ Zéros d'affaiblissement
- ▶ Pôles d'affaiblissement
 - zéros de transmission, zéros de $H(p)$ imaginaires purs

$$f_i / A_{dB}(f_i) = 0dB$$

$$f_j / A_{dB}(f_j) \rightarrow \infty dB$$

$$H(f_j) = 0$$

- ▶ Forme générale

- p_k : pôles
- z_n : zéros
- K facteur d'échelle (gain) réel
- En général, on choisit K tel qu'il y ait le maximum de zéros d'affaiblissement (gain=1 (0dB)) car la sensibilité des filtres aux variations des composants est nulle aux zéros d'affaiblissement (*théorème*).

$$H(p) = K \frac{\prod_n (p - z_n)}{\prod_k (p - p_k)}$$

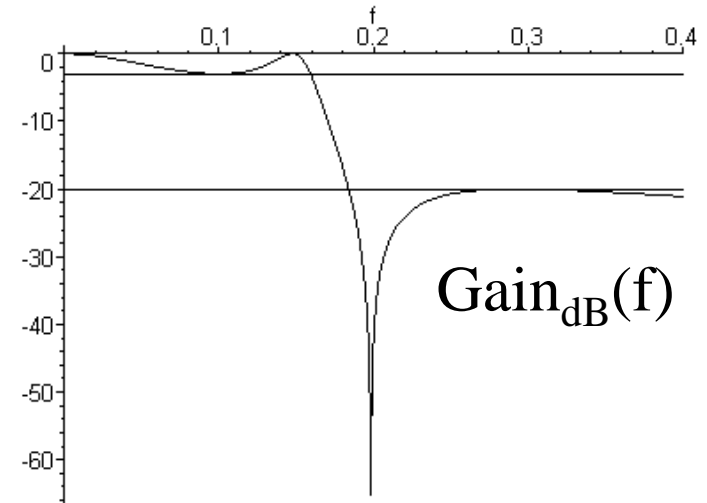
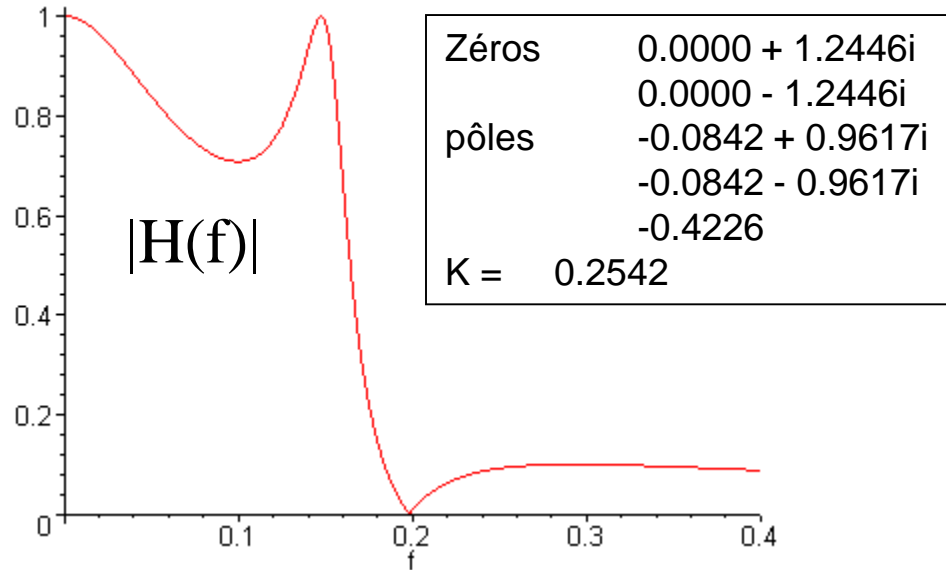
- ▶ **Ordre d'un filtre =**

Degré max du dénominateur ou du numérateur

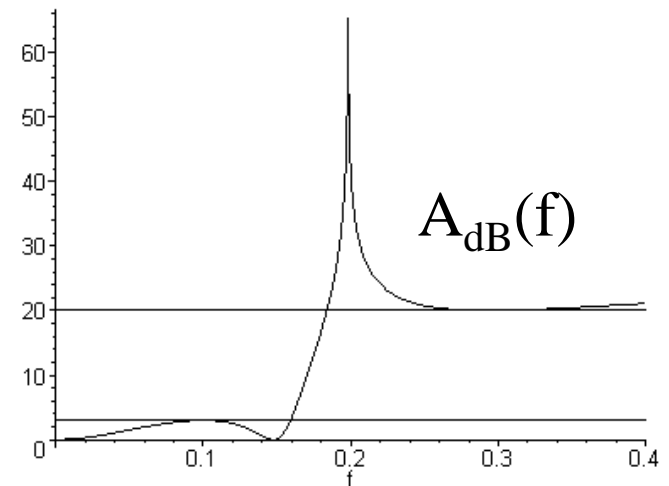
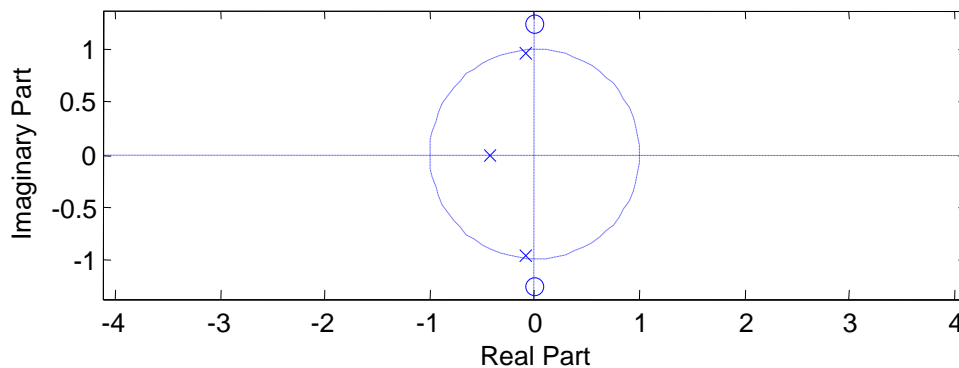
B- Modélisation : exemple de réalisation

Filtre elliptique passe-bas,
 ordre 3, BP 3dB, BC 20dB, $f_p=0.16$, $f_c=0.18$

$$H(p) = \frac{.2542 p^2 + .3938}{p^3 + .591 p^2 + 1.0031 p + .3938}$$



Plan de Laplace, pôles (x) et zéros (o)



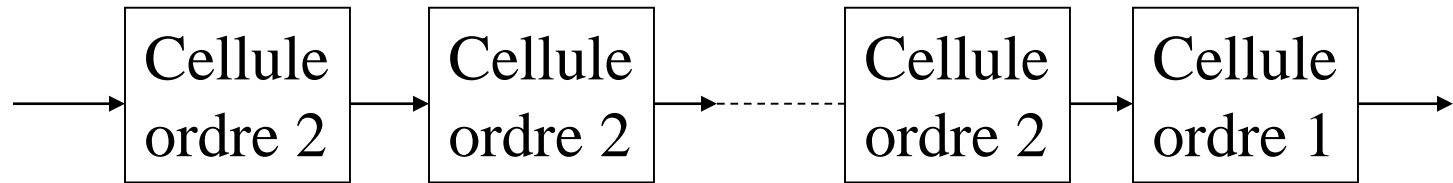
B- Modélisation : vers la synthèse

► Synthèse en cascade

(filtre actifs et certains filtres numériques)

- filtre d'ordre N pair: N/2 cellules d'ordre 2
- filtre d'ordre N impair : N/2 cellules d'ordre 2, une cellule d'ordre 1

$$H(p) = \prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \frac{b_{k,2}p^2 + b_{k,1}p + b_{k,0}}{a_{k,2}p^2 + a_{k,1}p + a_{k,0}} \cdot \frac{c_1p + c_0}{d_1p + d_0}$$



- Problème de l'ordre (=organisation) des cellules ?
- Problème de la répartition des pôles et des zéros dans chaque cellule ?
- Problème du gain de chaque cellule ?

► Synthèse additive par décomposition en éléments simples

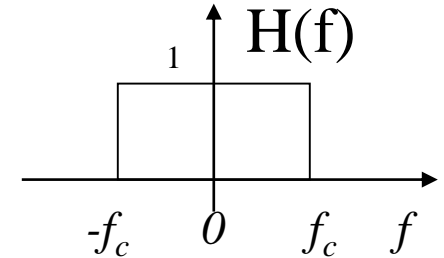
- peu utilisée en analogique (sauf égalisation audio)

(Réaliser un filtre idéal?)

- ▶ Peut-on réaliser un filtre (passe-bas) idéal ?

$$H(f) = \text{Rect}\left(\frac{f}{2f_c}\right)$$

$$h(t) = 2f_c \text{Sinc}(2f_c t)$$



- ▶ Réponse impulsionnelle non causale, bande de transition de largeur nulle
→ filtre idéal irréalisable

- ▶ Filtre non idéal:

- approximation du filtre idéal
- déphasage non nul
- Oscillations ($\text{Sinc}(t)$), dues à la transition raide, gênantes
- Besoins réels moins draconiens pour les applications

B- Modélisation: fonctions de réponse normalisées

- ▶ Normalisation de $H(p)$ $p = r + j\omega = r + j2\pi f$
 - dans les formules, apparaît systématiquement une pulsation particulière caractéristique ω_p

$$\frac{p}{\omega_p} = s = \frac{r}{\omega_p} + j \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{r}{\omega_p} + j \frac{f}{f_p} = \frac{r}{\omega_p} + j\Omega$$

- s : variable de Laplace normalisée
- Ω : pulsation ou fréquence normalisée, SANS DIMENSION
- La forme normalisée permet de travailler sur une expression INDEPENDANTE des fréquences réelles (de coupure,...)

- ▶ Exemple: circuit passe-bas RC, $f_c = 1/(2\pi RC)$

$$H(p) = \frac{1}{1+RCp}, \quad \omega_p = \frac{1}{RC}, \quad H(p) = \frac{1}{1+p/\omega_p}, \quad \boxed{H(s) = \frac{1}{1+s}, \quad H(\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}}$$

- Tous les passe-bas du premier ordre ont les mêmes fonctions de transfert et réponses en fréquence NORMALISEES

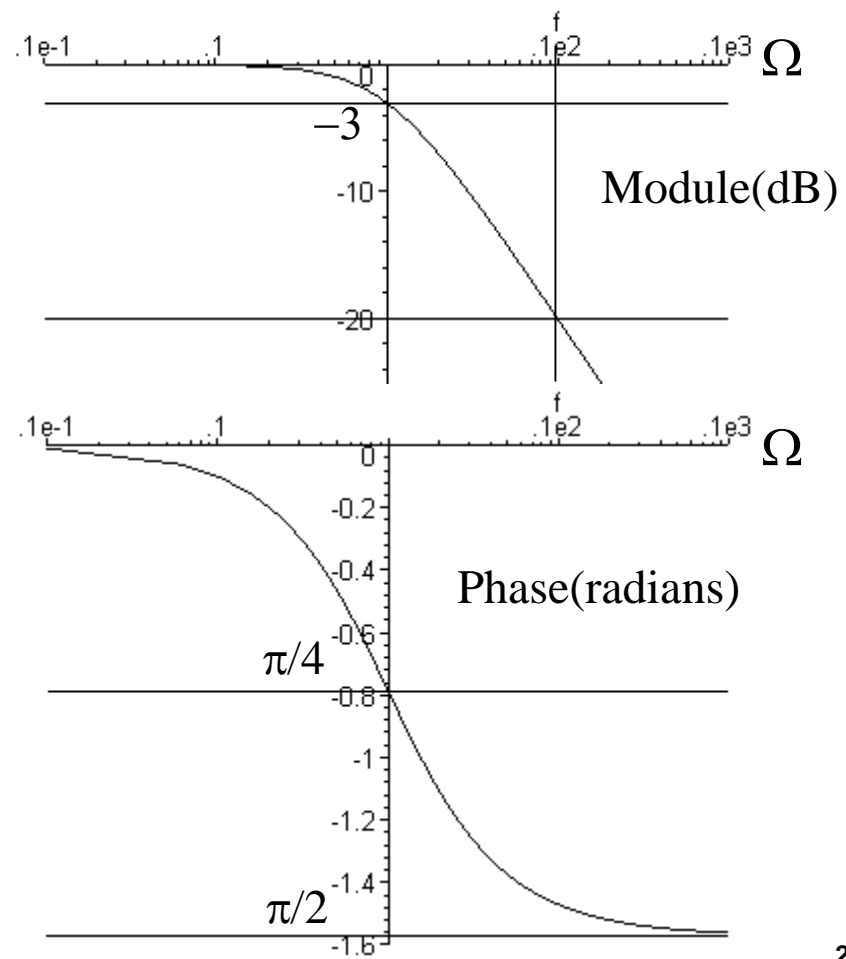
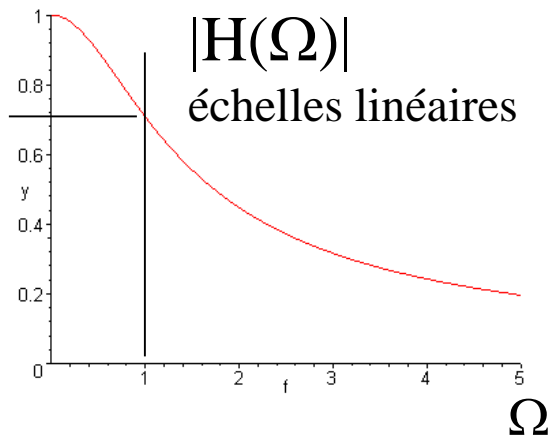
B- Modélisation: fonctions de réponse normalisées

► Fonction du premier ordre (passe-bas)

$$H(s) = \frac{1}{1 + s}$$

- pôle $s=-1$ ($p=-w_p$)
- Diagramme de Bode (asymptote -6dB/octave, -20dB/décade)
-3dB à $\Omega = 1$ ($\omega=\omega_p$)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$$



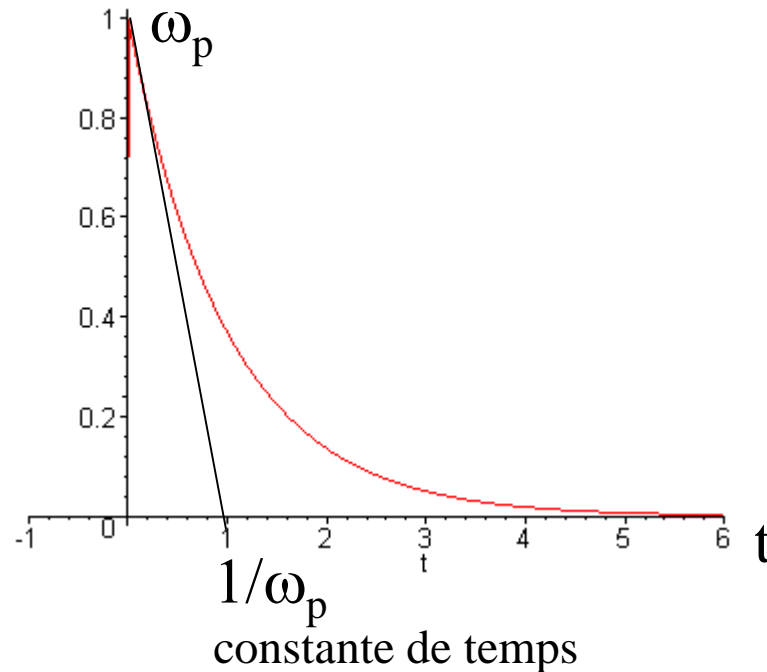
B- Modélisation: normalisée -> dé-normalisée

- Réponse impulsionnelle normalisée

$$H(s) \xrightarrow{T.Laplace\ inverse} h(\tau) = u(\tau)e^{-\tau}$$

- Réponse impulsionnelle dénormalisée

$$H(p) \xrightarrow{T.Laplace\ inverse} h(t) = \omega_p u(t)e^{-\omega_p t}$$



B- Modélisation : Transposition des fonctions de réponse

- ▶ Transposition pour changer la sélectivité
- ▶ Passe-bas \longleftrightarrow

Passe-haut
Passe-bande
Réjecteur/coupe-bande

→ Simplifier les procédures de calcul des filtres

→ L'étude des filtres passe-bas est suffisante

- ▶ Transposition passe-bas/passe-haut $\Omega = 1, \omega = \omega_p$

- Symétrie (en échelle log) autour du point

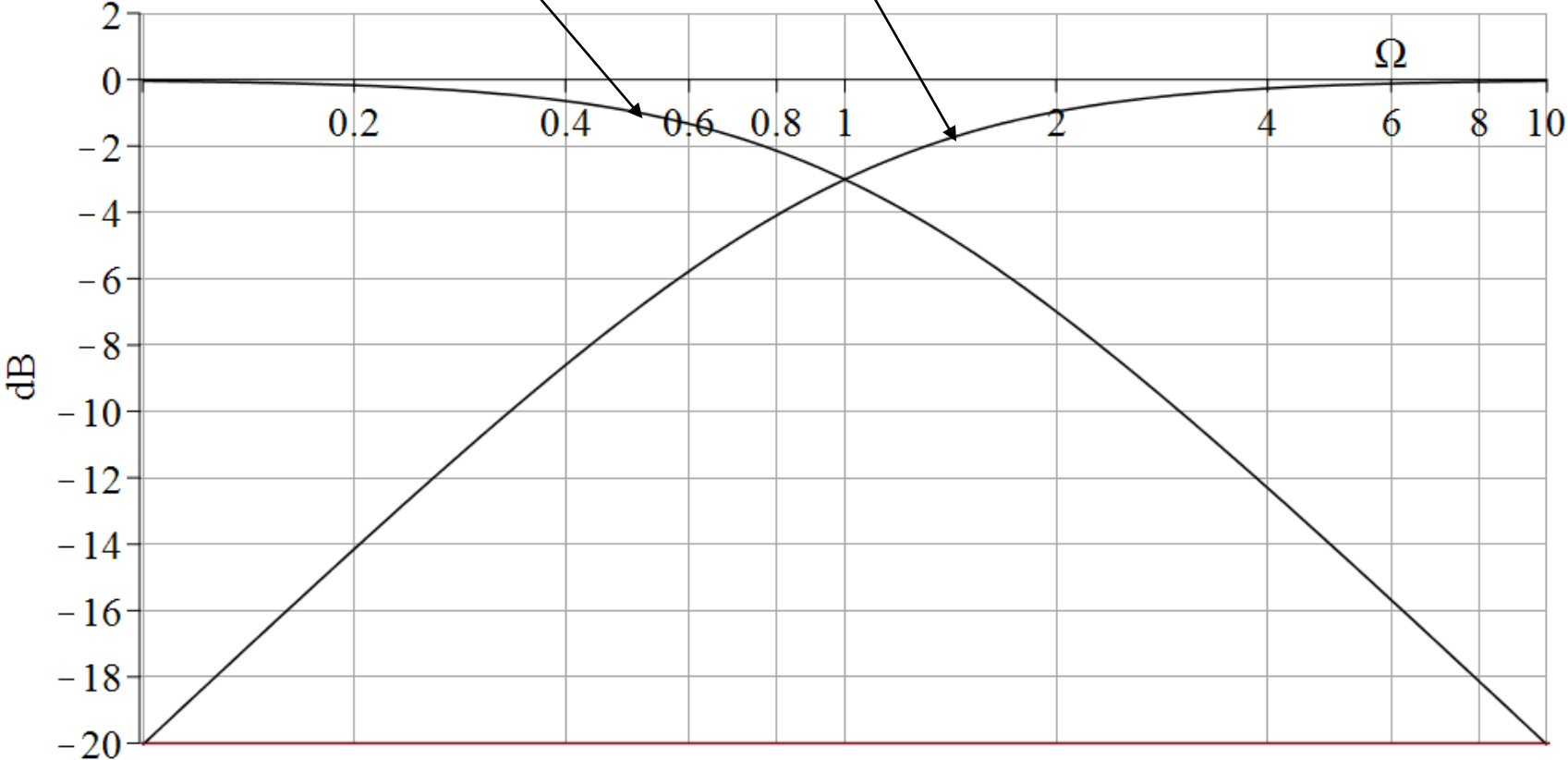
$$s \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad j\Omega \leftrightarrow \frac{1}{j\Omega}, \quad j \frac{\omega}{\omega_p} \leftrightarrow -j \frac{\omega_p}{\omega}$$

- $\Omega = 1, \omega = \omega_p$ est en général situé dans la bande de transition

B- Modélisation : Transposition des fonctions de réponse

- Exemple: Fonction du premier ordre

$$\frac{1}{1+s} \leftrightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{s}} = \frac{s}{1+s}, \quad \frac{j\Omega}{1+j\Omega} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_p}}{1+j\frac{\omega}{\omega_p}}$$



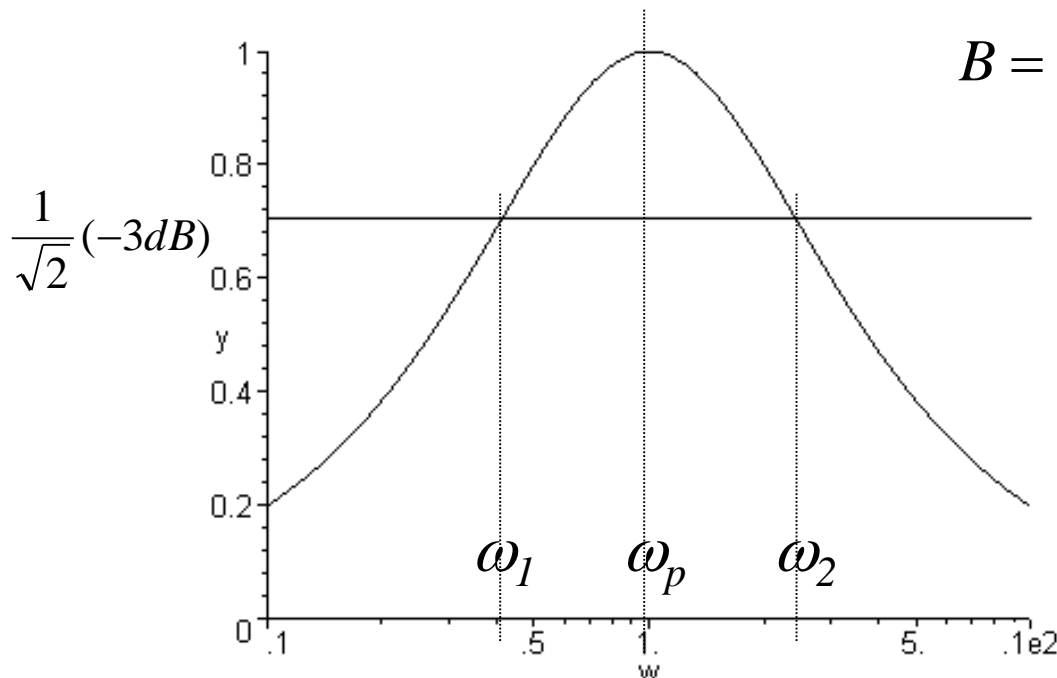
B- Modélisation : Transposition des fonctions de réponse

► Transposition passe-bas/passe-bande

- Décalage de $\Omega=0$ en $\Omega=1$ (*Modulation d'amplitude.....*)

$$s \leftrightarrow \frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right), \quad j\Omega \leftrightarrow \frac{j}{B} \left(\Omega - \frac{1}{\Omega} \right), \quad j \frac{\omega}{\omega_p} \leftrightarrow \frac{j}{B} \left(\frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right)$$

- B = bande passante relative (à 3dB pour un 2nd ordre), ω_p pulsation centrale du passe-bande



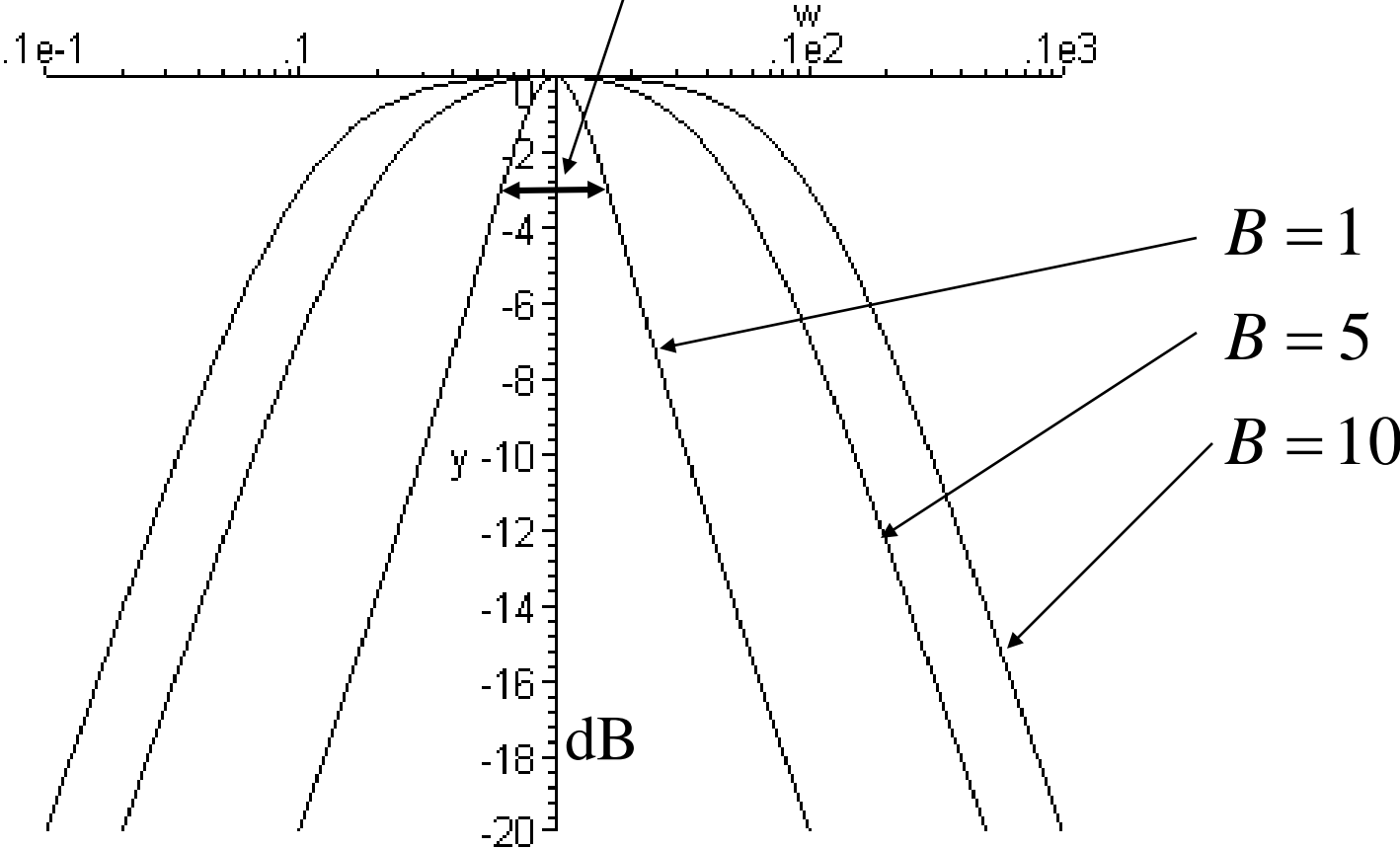
$$B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_p} = \frac{f_2 - f_1}{f_p}$$

B- Modélisation : Transposition des fonctions de réponse

- Fonction passe bas du premier ordre \rightarrow passe bande du 2nd ordre

$$\frac{1}{1+s} \leftrightarrow \frac{Bs}{1+Bs+s^2}, \quad \frac{jB\Omega}{1+jB\Omega-\Omega^2}$$

\rightarrow Ordre x 2



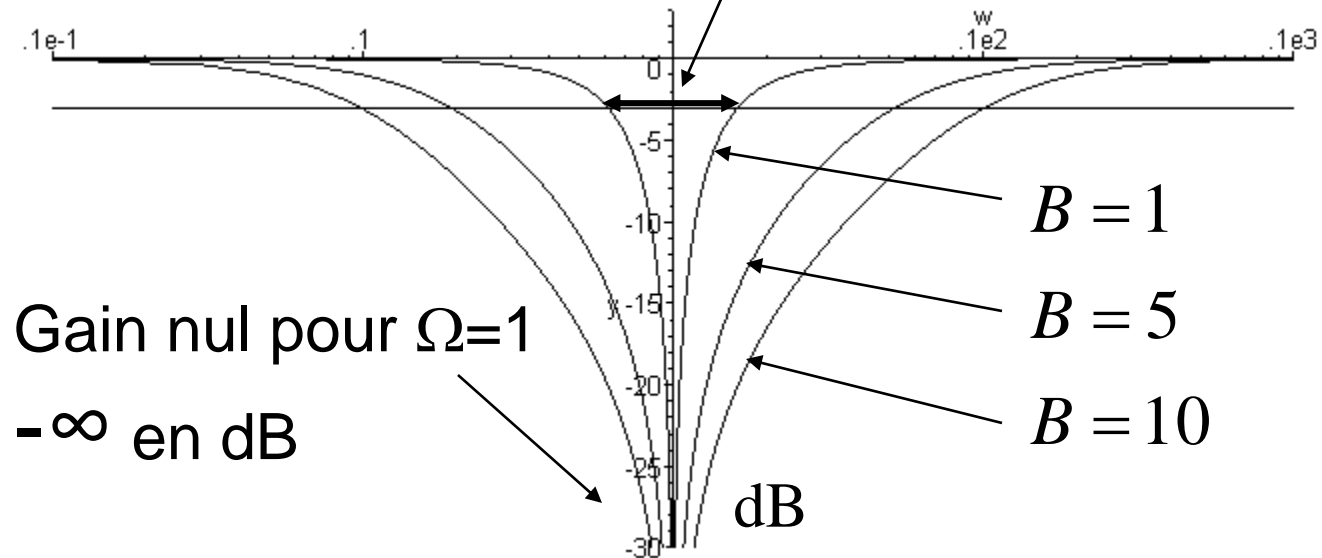
B- Modélisation : Transposition des fonctions de réponse

► Transposition passe-bas/coupe-bande

$$s \leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{B} \left(s + \frac{1}{s} \right)} = B \frac{s}{s^2 + 1}$$

- Ex: premier ordre

$$\frac{1}{1+s} \rightarrow \frac{s^2 + 1}{s^2 + Bs + 1}, \quad \frac{1 - \Omega^2}{1 + jB\Omega - \Omega^2}$$



B- Modélisation: fonction d'approximation

► Fonction du premier ordre

- voir étude précédente...

$$\frac{1}{1+s}$$

► Fonction du 2eme ordre

- Q coefficient de qualité, ou de surtension
- z, coefficient d'amortissement

$$H(s) = \frac{1}{1+ds+s^2}$$

$$d = \frac{1}{Q} = 2z$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1+jd\Omega-\Omega^2} \quad |H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\Omega^4 + \Omega^2(d^2 - 2) + 1}}$$

$$\text{Arg}(H(j\Omega)) = \text{Arctg}\left(\frac{-d\Omega}{1-\Omega^2}\right)$$

$$\frac{d|H(j\Omega)|}{d\Omega} = 0 \Rightarrow \text{maximum pour } \Omega_M = 0 \text{ et } \pm \sqrt{1 - \frac{d^2}{2}} \text{ si } d < \sqrt{2}, Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$$

$$H_M = H(j\Omega_M) = \frac{1}{d\sqrt{1-\frac{d^2}{4}}} = \frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} > Q$$

$$H(j1) = -jQ$$

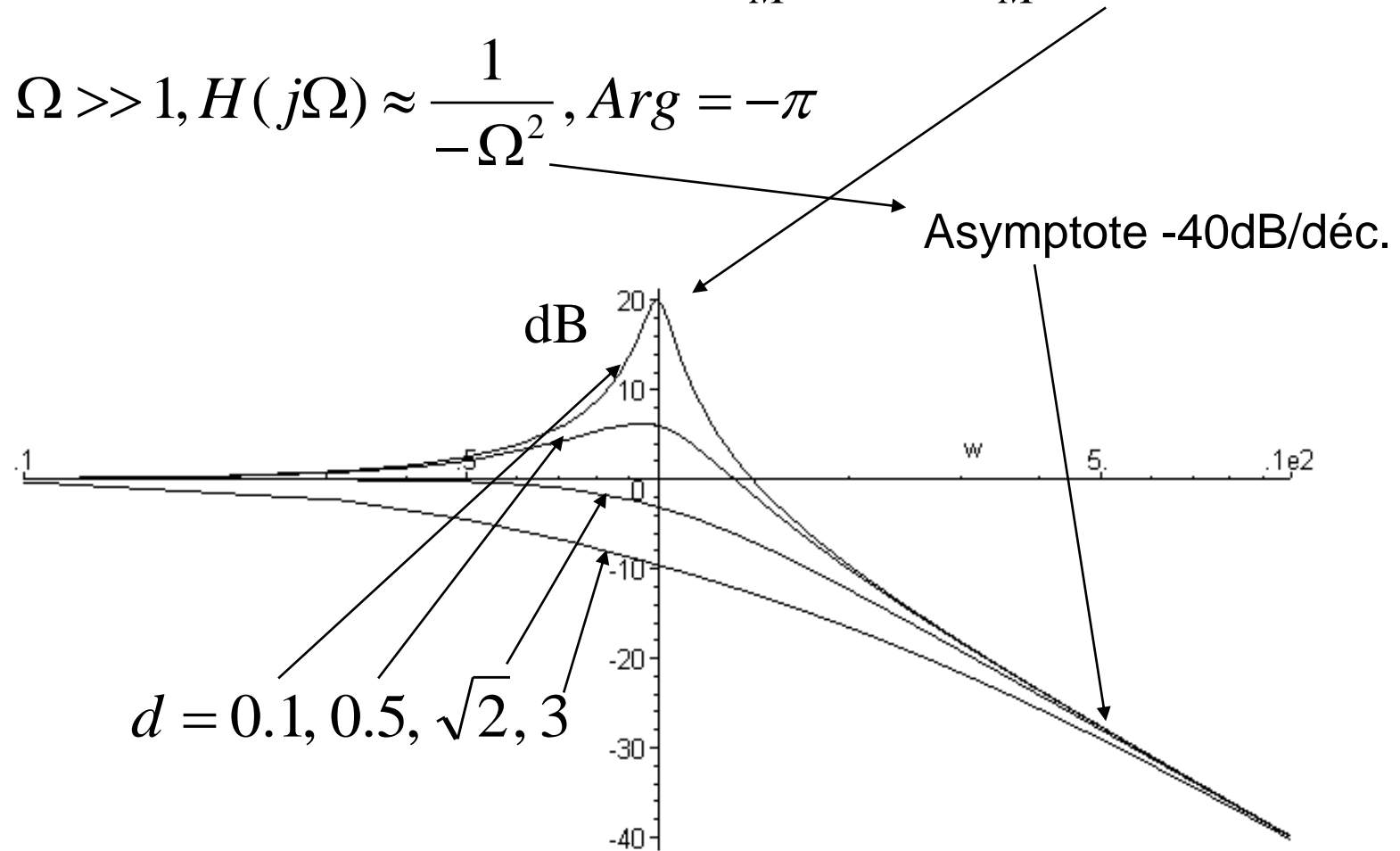
$$H(j0) = 1$$

B- Modélisation: fonction d'approximation

- Fonction du 2eme ordre (suite)

$$\text{Si } d \ll 1, Q \gg 1, \Omega_M \approx 1, H_M \approx Q$$

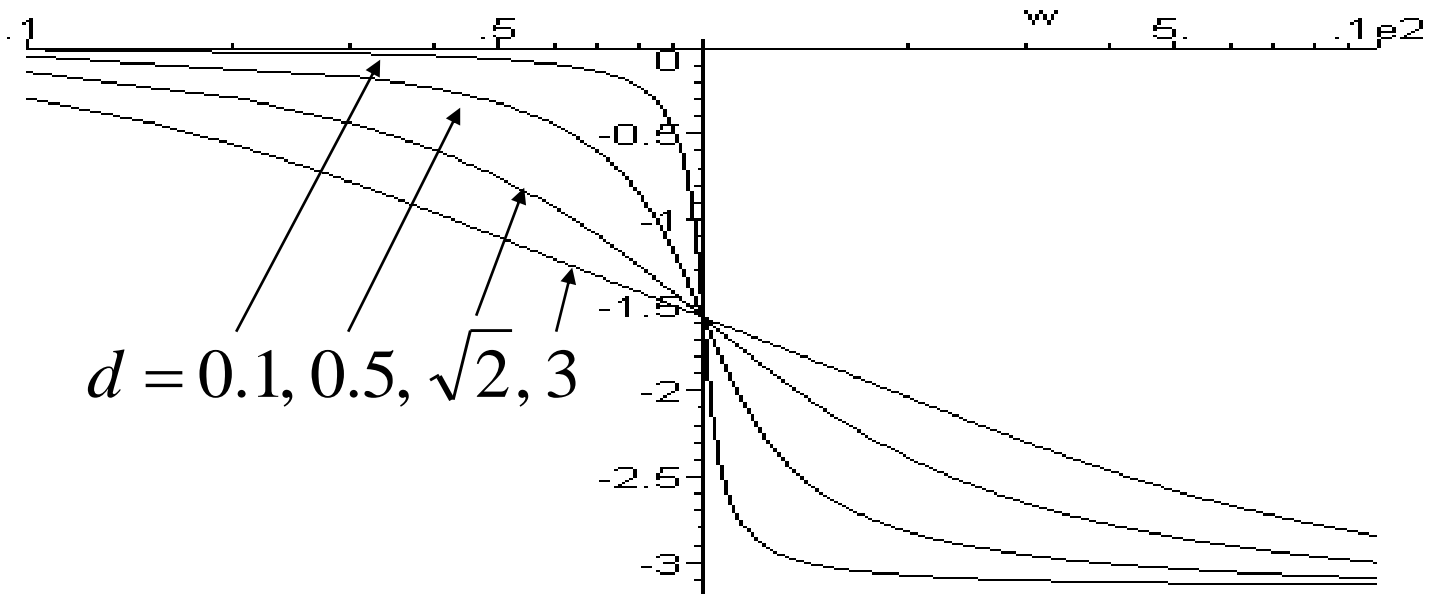
$$\Omega \gg 1, H(j\Omega) \approx \frac{1}{-\Omega^2}, \text{Arg} = -\pi$$



B- Modélisation: fonction d'approximation

► Fonction du 2eme ordre (suite)

Phase



Rem: si $d > 2$, $H(s)$ = deux filtres du premier ordre en cascade.
Ce n'est plus un VRAI 2eme ordre!

$$H(s) = \frac{1}{(s - \Omega_1)} \frac{1}{(s - \Omega_2)} \quad \text{pulsations de coupure } \Omega_1 = \frac{1}{\Omega_2}$$

B- Modélisation: fonction d'approximation

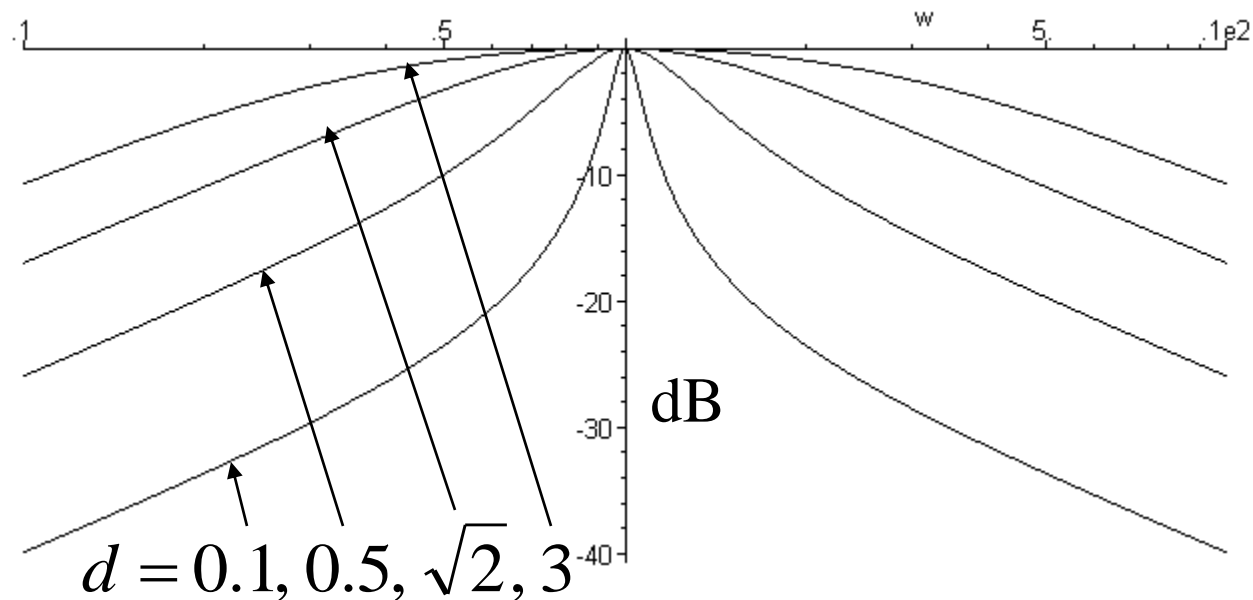
► Fonction du 2eme ordre (suite)

- Passe-haut:
symétrie des courbes
précédentes par rapport à $\Omega=1$

$$s \rightarrow \frac{1}{s}, H(s) = \frac{s^2}{1 + ds + s^2}$$

- Passe-bande:
A faire en exercice

$$H(s) = \frac{ds}{1 + ds + s^2}$$



B- Modélisation: fonction d'approximation Butterworth

► Fonction de Butterworth

- filtre d'ordre n

$$|H_n(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^{2n}}}$$

- ...on montre:

$H(s)$ pôles sur le cercle unité

$$s_i = \cos(\varphi_i) + j \sin(\varphi_i), \quad \varphi_i = \frac{\pi}{2n} (n + 2i - 1), \quad i = 1, n$$

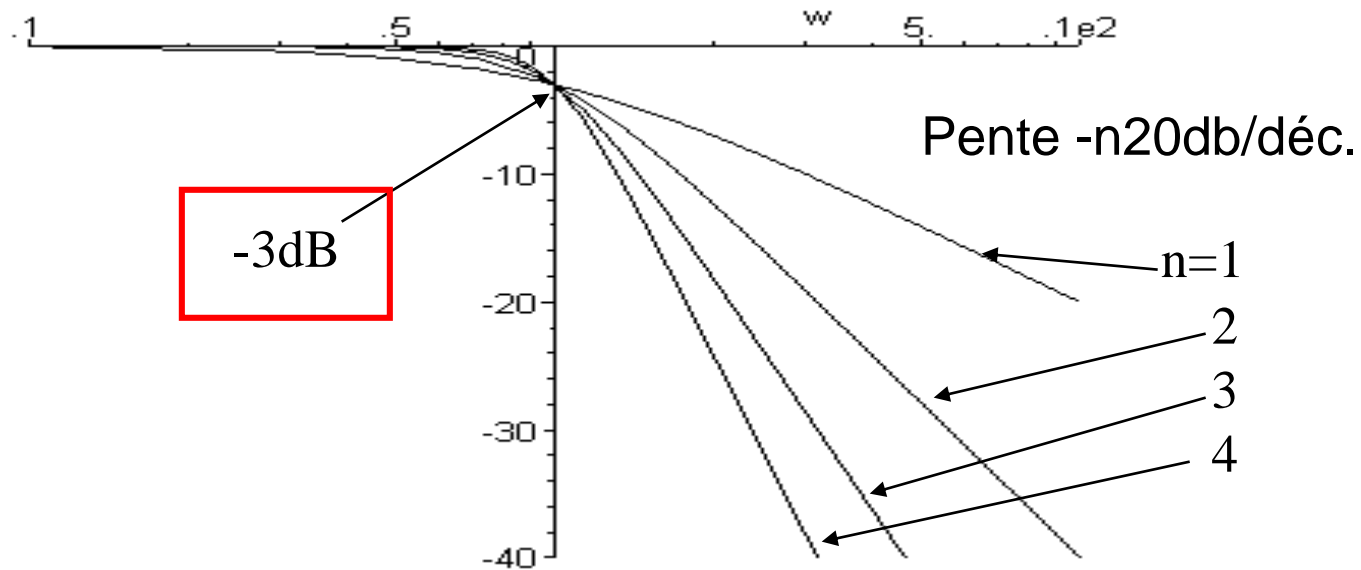
$$H(s) = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{1}{s^2 + d_i s + 1}, \quad \text{pour } n \text{ pair}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{s^2 + d_i s + 1}, \quad \text{pour } n \text{ impair}$$

$$d_i = -2 \cos(\varphi_i), \quad i = 1, n/2$$

B- Modélisation: fonction d'approximation Butterworth

► Fonction de Butterworth (suite)



$$n = 1 \quad \frac{1}{1+s}$$

$$n = 2 \quad \frac{1}{1+\sqrt{2}s+s^2}$$

$$n = 3 \quad \frac{1}{1+s} \frac{1}{1+s+s^2} = \frac{1}{1+2s+2s^2+s^3}$$

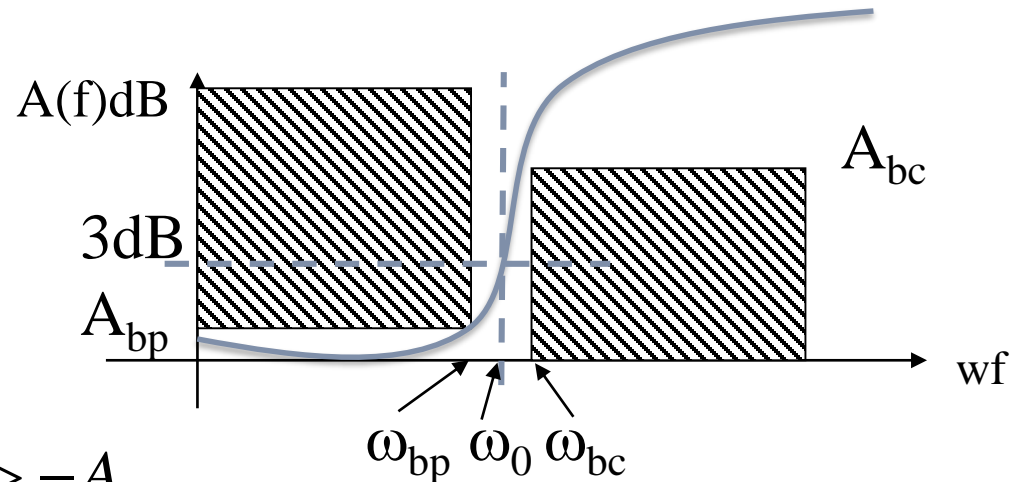
B- Modélisation: fonction d'approximation Butterworth

- ▶ Choix de l'ordre n et de la pulsation de normalisation d'un filtre de Butterworth
 - Gabarit passe-bas d'affaiblissement:
- ATTENTION: la courbe doit passer par 3dB à $\omega = \omega_0$ pulsation de normalisation

- 4 paramètres

$$A_{bp}, A_{bc}, \omega_{bp}, \omega_{bc}$$

- Il faut respecter:



$$20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{bp}}{\omega_0} \right)^{2n}}} \right) > -A_{bp}$$

$$\longrightarrow n_{min}, \omega_0$$

$$20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{bc}}{\omega_0} \right)^{2n}}} \right) < -A_{bc}$$

On obtient en fait:

- n_{min} non entier

Puis pour n entier $> n_{min}$

$$\omega_0 \in [\omega_1, \omega_2]$$

B- Modélisation: fonction d'approximation Butterworth

▶ Sélectivité $k = \omega_{bp} / \omega_{bc}$

▶ On obtient:

$$n_{\min} = \frac{\log(10^{\frac{A_{bp}}{10}} - 1) - \log(10^{\frac{A_{bc}}{10}} - 1)}{2 \log(k)}$$

▶ Choisir n entier $> n_{\min}$

$$20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{bp}}{\omega_1}\right)^{2n}}} \right) = -A_{bp}$$

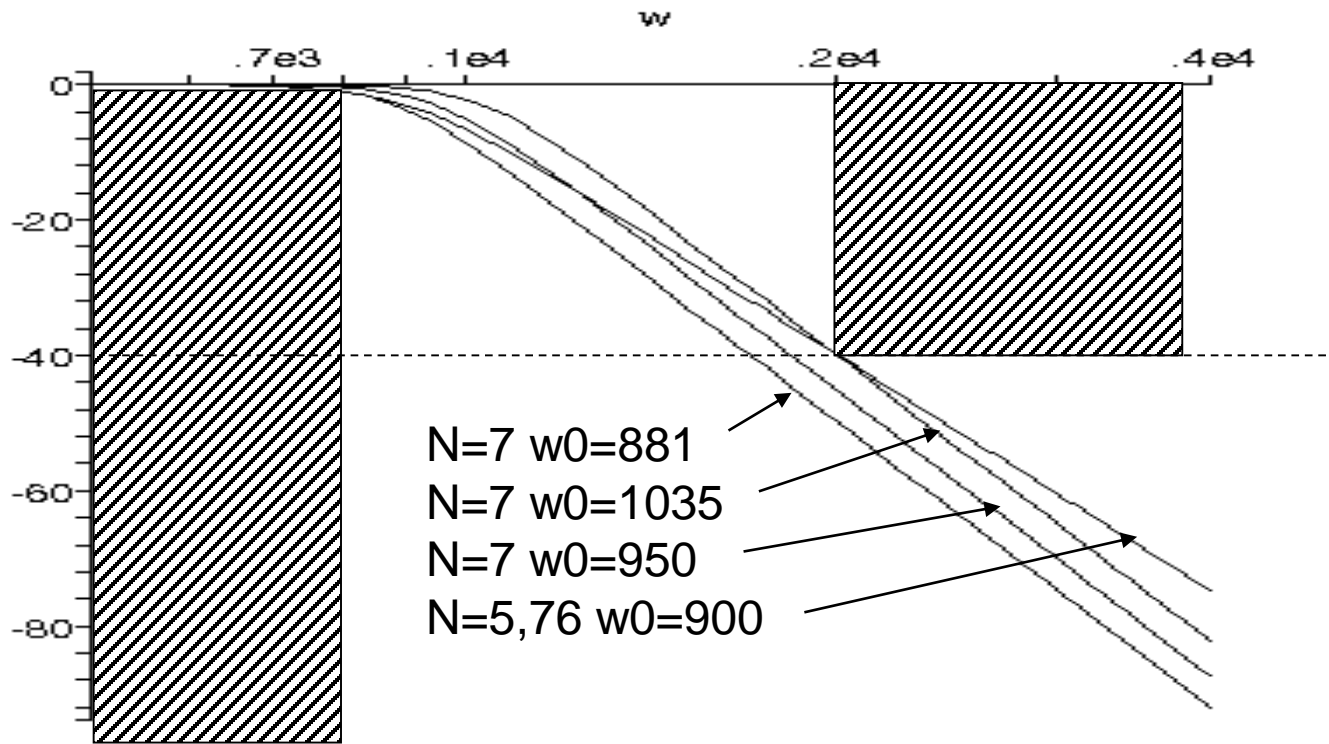
$$\omega_1 = \omega_{bp} \left(10^{\frac{A_{BP}}{10}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2n}}$$

$$20 \log_{10} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_{bc}}{\omega_2}\right)^{2n}}} \right) = -A_{bc}$$

$$\omega_2 = \omega_{bc} \left(10^{\frac{A_{BC}}{10}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2n}}$$

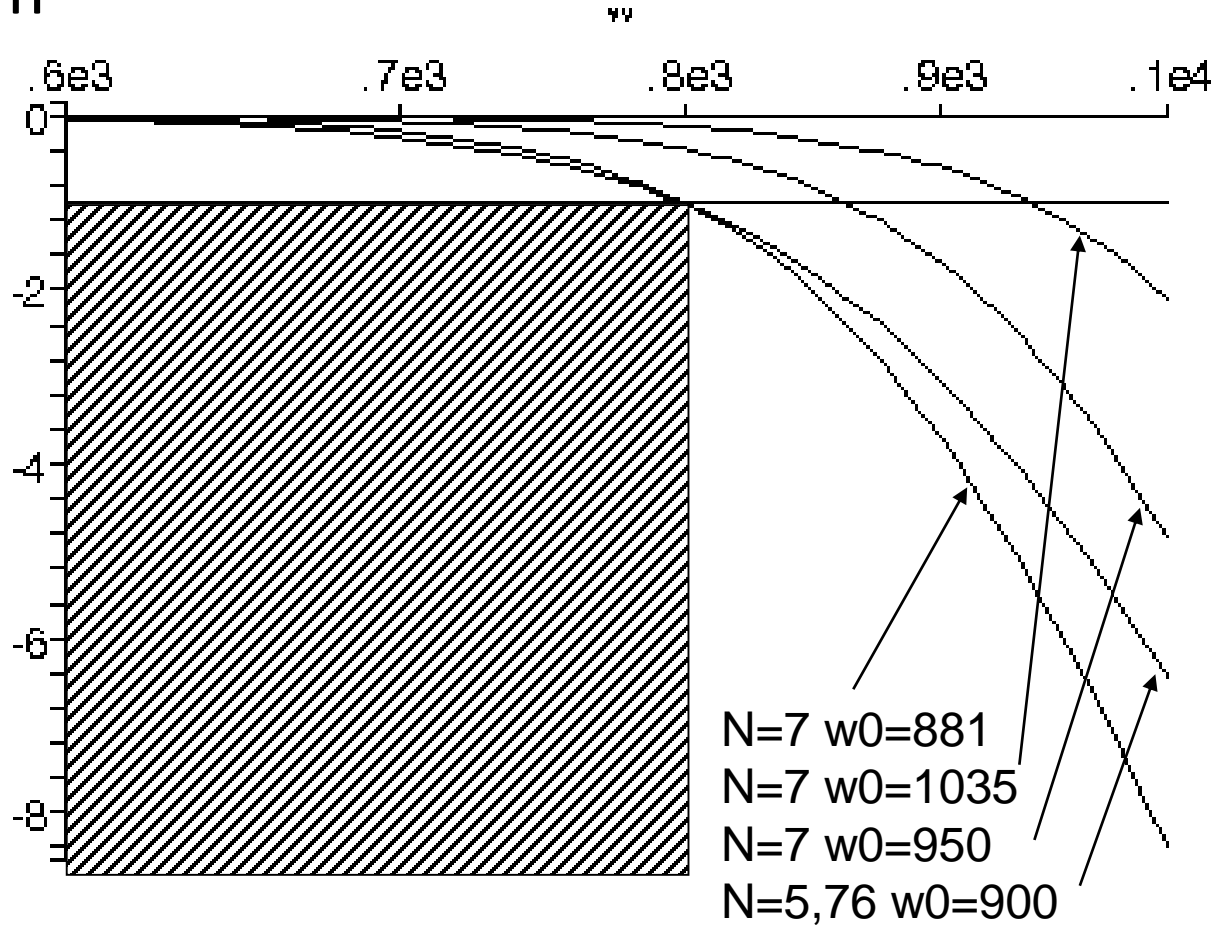
B- Modélisation: fonction d'approximation Butterworth

- ▶ Exemple: $F_{bp}=800\text{Hz}$, $F_{bc}=2000\text{Hz}$,
 $A_{bp}=1\text{dB}$, $A_{bc}=40\text{dB}$
- ▶ $n_{\min}=5,76$
- ▶ Choix $n=7$, $f_1=881\text{Hz}$, $f_2=1035\text{Hz}$



B- Modélisation: fonction d'approximation Butterworth

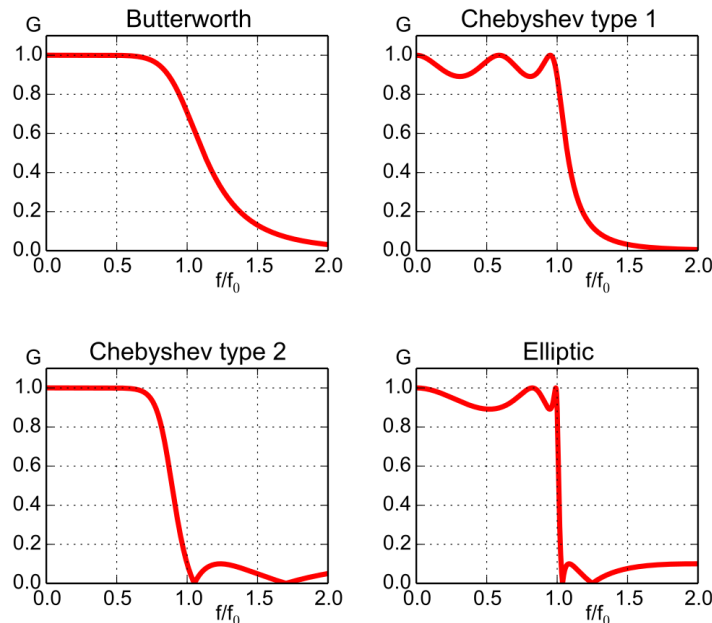
Zoom



B- Modélisation: fonction d'approximation

► Autres fonctions d'approximation

- Filtres polynomiaux:
 - Butterworth : sélectif, optimisation de la réponse en amplitude
 - Legendre (Papoulis) : Très sélectif, avec atténuation continûment croissante
 - Chebyshev type I et type II: Les plus sélectifs, ondulation dans la bande passante (type I), dans la bande coupée (type II)
 - Bessel (Thomson) : Peu sélectif, optimisation de la réponse en phase
- Filtres elliptiques (Cauer, Chebyshev type II)
 - Présence de zéros de transmission dans la bande coupée, encore plus sélectif que Chebyshev, mais atténuation limitée en bande coupée



4 passes bas ordre 5

B- Modélisation: fonction d'approximation Chebyshev

► Filtres de Chebyshev (*Equal Ripple (ER) filters*)

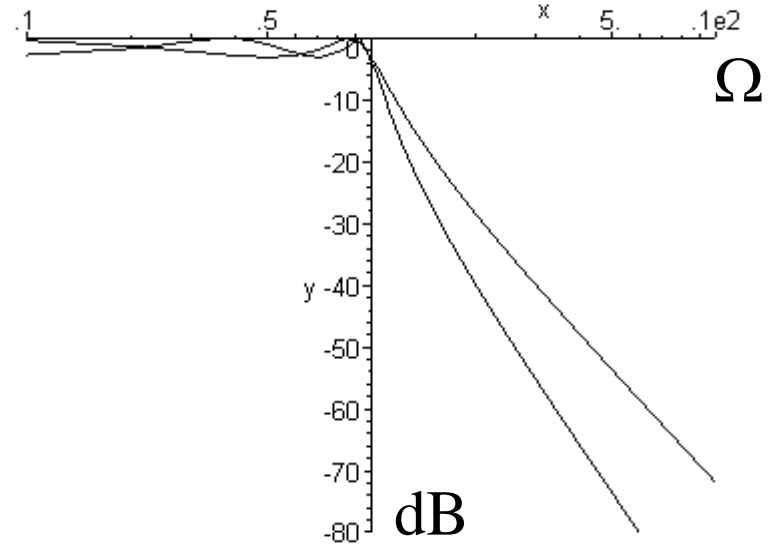
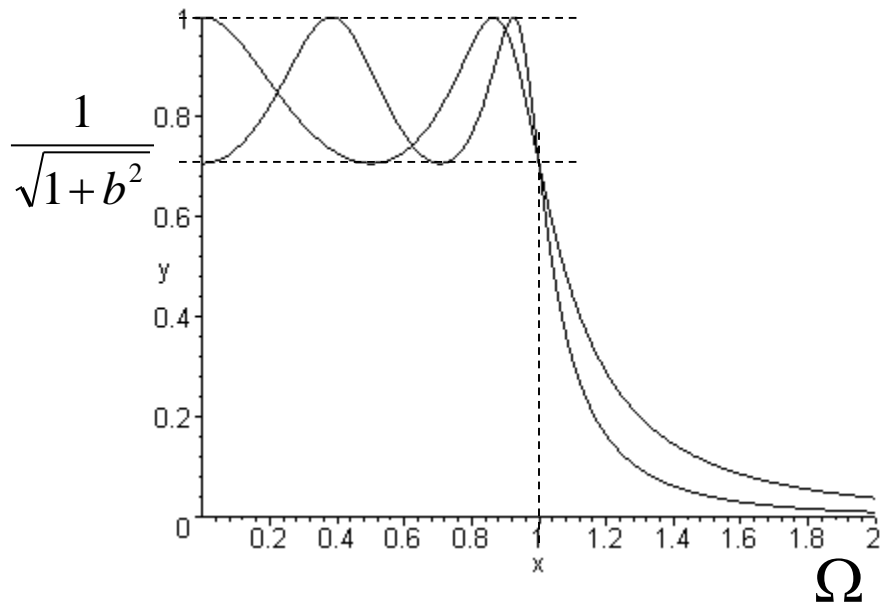
Type I : Ondulation dans la bande passante

- Polynômes de Chebyshev

$$|H_n(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 T_n^2(\Omega)}}$$

$$T_0 = 1, T_1 = \Omega, T_n = 2\Omega T_{n-1} - T_{n-2} = \begin{cases} \cos(n \arccos(\Omega)) & \text{pour } \Omega \leq 1 \\ \cosh(n \operatorname{arcosh}(\Omega)) & \text{pour } \Omega > 1 \end{cases}$$

- Exemples: n=3 et n=4, b=1



► Filtrés de Chebyshev (suite)

- ... on montre: pôles situés sur une ellipse dans le plan de Laplace
- La fonction de transfert $H(s)$ dépend de l'ordre n ET de b (b définit l'ondulation en bande passante)
- ex: $b=1$ ondulation de 3dB en bande passante
- ex: $H(s)$ pour $n=2$ et 3, pour 1 dB d'ondulation

$$\frac{1}{1 + 0.9957s + 0.907s^2} \cdot \frac{1}{(1 + 2.0235s)(1 + 0.4971s + 1.0058s^2)}$$

- Tables (techniques de l'ingénieur,...)
- Logiciels (Matlab, python ...)

B- Modélisation: fonction d'approximation Cauer

► Filtres de Cauer

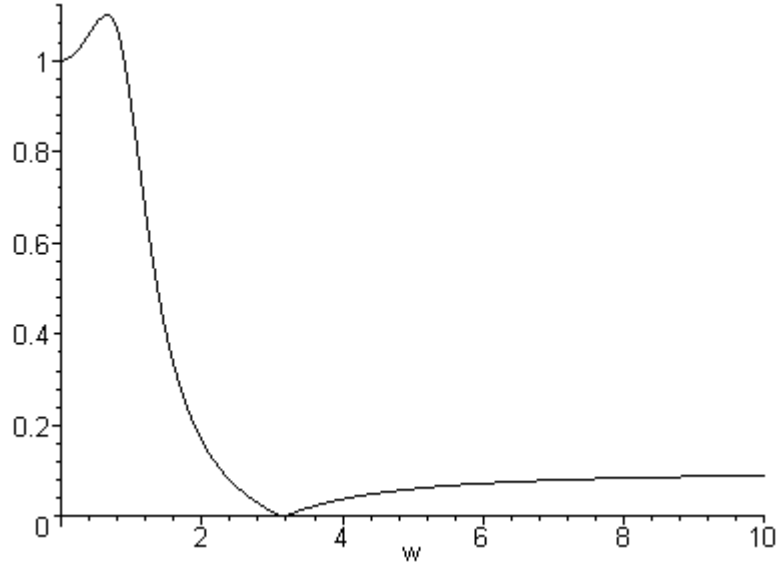
- présence de zéros de transmission dans la bande coupée
coupure très raide, bande de transition étroite, forte sélectivité
- comportement de Chebyshev dans la bande passante
- mais...réalisation et réglages délicats
- Fonction de transfert de base d'ordre 2:

$$H_2(s) = \frac{as^2 + b}{s^2 + ds + c}$$

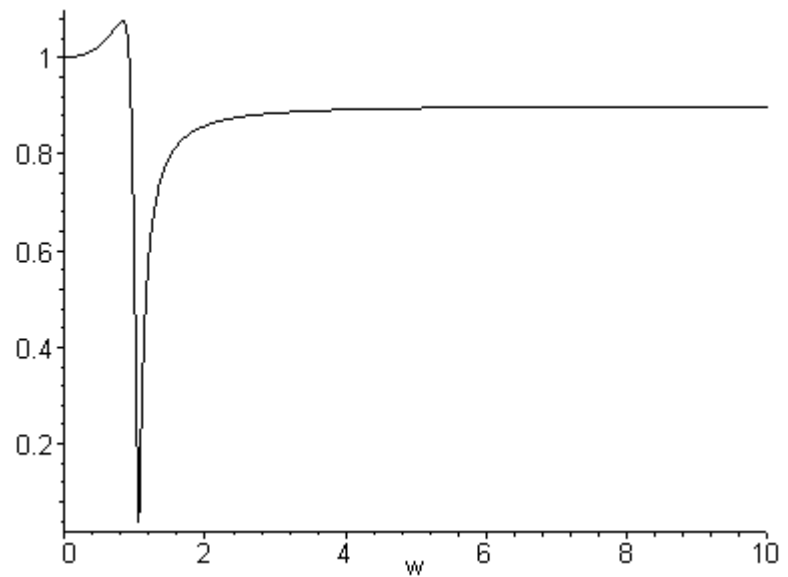
- Gain (asymptote) en BF : b/c
- Gain (asymptote) en HF : a
- Passe-haut ($b/c < a$) ou passe-bas ($b/c > a$)
- Zéros de transmission (gain nul, atténuation infinie) $\Omega_\infty = \sqrt{\frac{b}{a}}$
- Dénominateur: résonance à environ $\Omega_m = 1$ (cf. étude du 2nd ordre)
- Grande sélectivité pour $\Omega_m \approx \Omega_\infty$ mais avec d faible (risque d'instabilité)
et $a \sim b$ (faible différence entre BP et BC)
- On peut étudier la forme simplifiée avec $c=1$, $a=1$ (passe-haut avec $b < a$) ou $b=1$ (passe-bas avec $b > a$)

B- Modélisation: fonction d'approximation Cauer

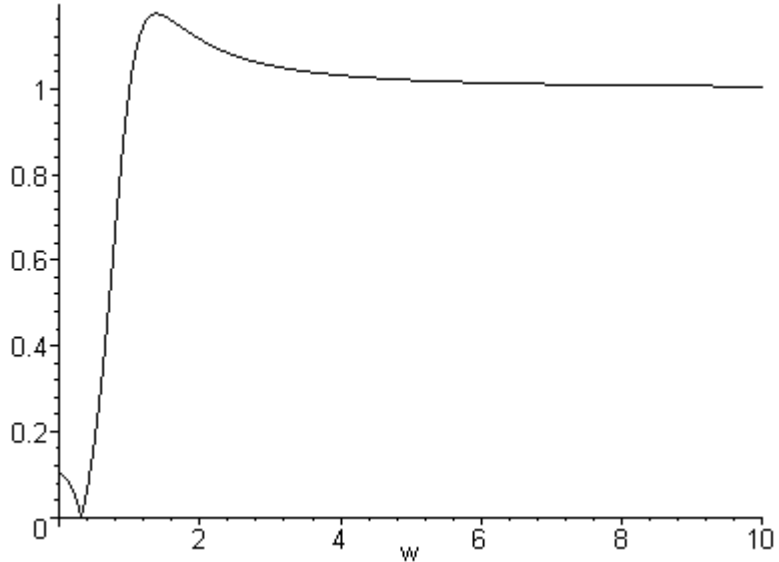
$a=0.1, b=1, d=1$



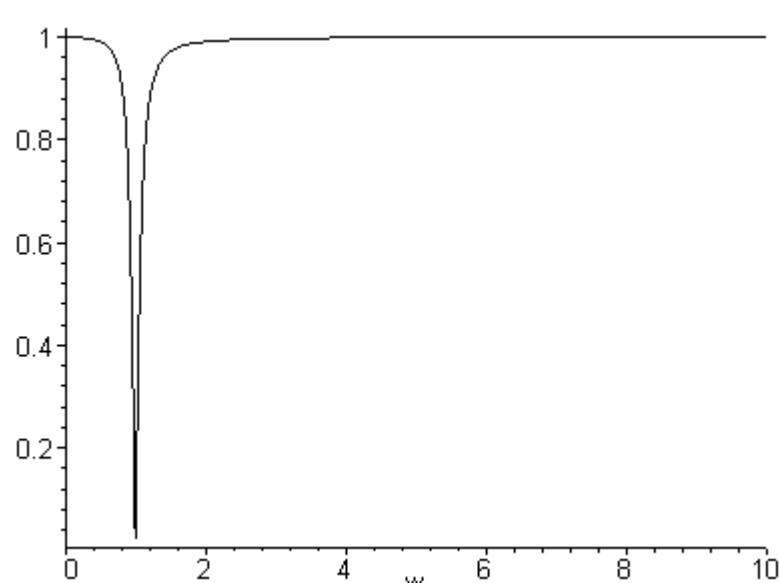
$a=0.9, b=1, d=0.2$



$a=1, b=0.1, d=0.9$



$a=1, b=1, d=0.2$



B- Modélisation: fonction d'approximation Cauer

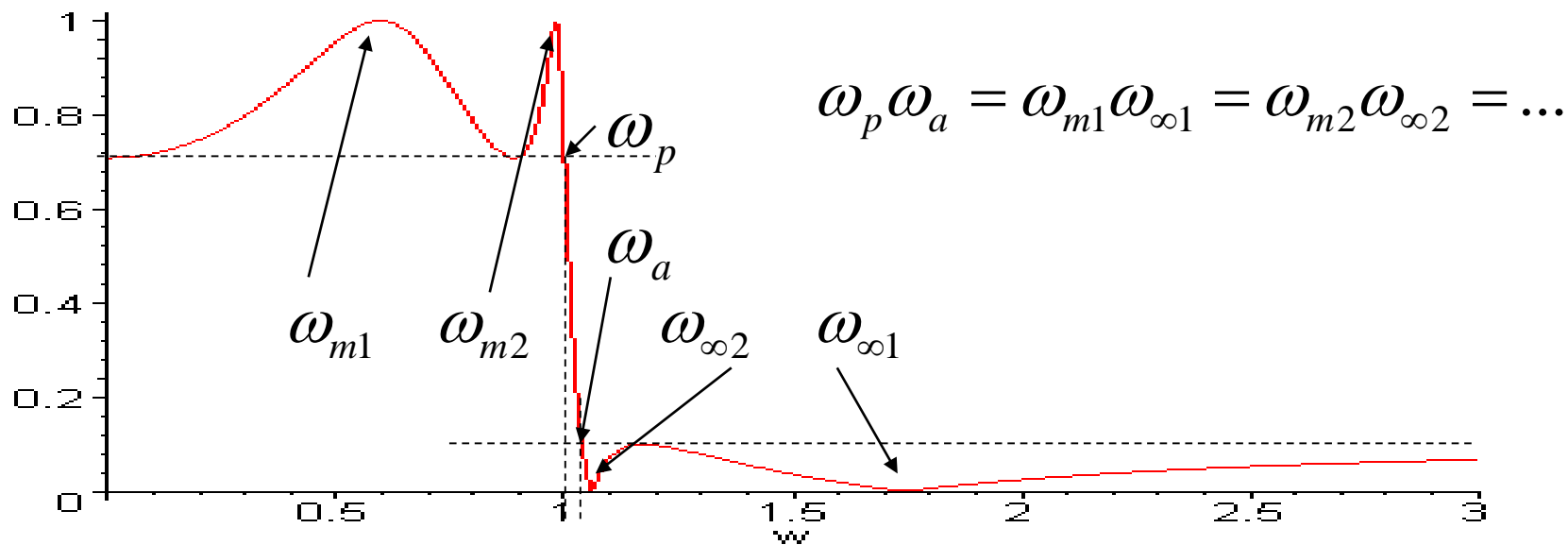
► Filtrés de Cauer (suite)

- Ordre > 2 : mise en cascade (produit) de N fonctions d'ordre 2

$$H(p) = \prod_{i=1}^N \frac{\frac{p^2}{\omega_{\infty i}^2} + 1}{\frac{p^2}{\omega_{mi}^2} + d \frac{p}{\omega_{mi}} + 1}$$

$\omega_{\infty i}$: Zéros de transmission dans la BC

ω_{mi} : Position **approximative** des maxima dans la BP



B- Modélisation: fonction passe tout

► Fonctions passe-tout

- Module $|H(f)|= 1$, action sur la phase

$$H_1(s) = \frac{1-s}{1+s} \quad \text{phase} = -2\text{arctg}(\Omega)$$

$$H_2(s) = \frac{1-as+bs^2}{1+as+bs^2} \quad \text{phase} = -2\text{arctg}\left(\frac{a\Omega}{1-b\Omega^2}\right)$$